А. ВОИНОВЪ,
директоръ Павловскаго реальнаго училища.

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ

съ собраніемъ задачъ.

Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній.

ВОСЬМОЕ ИЗДАНІЕ.

Въ пред. изданіи допущена Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. въ качествѣ руководства для среднихъ учебныхъ заведеній (Ж. М. Н. Пр., 1907 г., № 12.)

Цѣна 70 коп.

ПАВЛОВСКЪ н/Д.
Типографія И. П. Иванова.
1909.

Дозволено цензурою. Москва.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Составленіе предлагаемаго руководства вызвано желаніемъ, излагая начала тригонометріи по возможности кратко, обратить должное вниманіе на основныя мѣста курса. Съ этою цѣлью, между прочимъ, упрощены доказательства теоремъ и выпущены излишнія подробности, какъ напр., разложеніе въ строку синуса и косинуса угла, вслѣдствіе неубѣдительности доказательства для учениковъ, не знающихъ теоремъ о сходимости рядовъ. Каждая глава курса сопровождается собраніемъ задачъ: пока у учениковъ нѣтъ навыка въ рѣшеніи ихъ, дѣлаются указанія или знакомъ *, показывающимъ, что рѣшеніе данной задачи облегчается знаніемъ рѣшенія задачи, непосредственно предшествующей, или номеромъ той задачи, рѣшеніе которой въ какомъ-нибудь отношеніи сходно съ рѣшеніемъ предложенной.

Павловскъ н/Д.

ГЛАВА I.

§ 1. Стороны и углы треугольника, какъ извѣстно находятся въ такой зависимости между собою, что, зная изъ этихъ шести величинъ три какія-нибудь (въ числѣ ихъ должна быть, по крайней мѣрѣ, одна сторона или величина, отъ нея непосредственно зависящая, напр., высота, периметръ и т. п.), можно найти остальныя три или, какъ говорятъ, рѣшить треугольникъ.

Геометрія рѣшаетъ треугольники построеніемъ, тригонометрія[1])—вычисленіемъ. На практикѣ первый способъ представляетъ неудобства. Въ самомъ дѣлѣ, построивъ треугольникъ по даннымъ элементамъ, мы должны для измѣренія неизвѣстныхъ измѣрить ихъ транспортиромъ и масштабомъ, отъ несовершенства которыхъ зависитъ приближенность получаемыхъ результатовъ. При переходѣ къ дѣйствительнымъ размѣрамъ треугольника неточность опредѣляемыхъ элементовъ увеличивается. Неудовлетворительность такого „*графическаго*" рѣшенія треугольниковъ заставила обратиться къ рѣшенію ихъ вычисленіемъ, такъ какъ результаты при этомъ получаются съ желаемою степенью точности; но здѣсь явилось затрудненіе: для того чтобы ввести въ вычисленіе стороны и углы треугольника, надо было найти числовыя соотношенія между ними, т.-е. связать ихъ тремя уравненіями (такъ какъ неизвѣстны три величины), для чего надо выразить ихъ въ одинаковыхъ единицахъ, а между тѣмъ углы и стороны—величины разнородныя. Въ виду этого ввели въ вычисленіе вмѣсто угловъ прямыя, такъ связанныя съ углами, что, зная уголъ, можно найти соотвѣтствующую ему прямую, и обратно. Такимъ образомъ, задача сводилась къ тому, чтобы связать эти прямыя со сторонами треугольника.

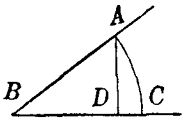
Греки ввели хорды; причина этого заключается въ слѣдующемъ. Опишемъ изъ вершины даннаго угла, какъ изъ центра, какимъ-нибудь радіусомъ дугу и проведемъ ея хорду. Хорда эта непрерывно увеличивается съ увеличеніемъ угла отъ 0° до 180°,

---

[1]) τρίγωνον—треугольникъ, μετρέω—измѣряю.

слѣд., каждому изъ угловъ отъ 0° до 180° соотвѣтствуетъ хорда опредѣленной величины. Если измѣримъ эти хорды тою же единицею, что и радіусъ, то и получимъ такъ называемыя *тригонометрическія числа грековъ*. Въ сочиненіи Клавдія Птоломея (125—140 по Р. Хр.), Μεγάλη Σύνταξις, извѣстномъ болѣе подъ арабскимъ названіемъ Альгаместа, помѣщены тригонометрическія числа при радіусѣ, равномъ 60 единицамъ длины.

Индусы употребляли перпендикуляръ, опущенный изъ конца (A) одного радіуса (AB) на другой (BC). Перпендикуляръ этотъ увеличивается непрерывно съ увеличеніемъ угла отъ 0° до 90°. Если измѣрить перпендикуляры, соотвѣтствующіе всѣмъ острымъ угламъ, тою же единицею, какою измѣренъ радіусъ, то получимъ *тригонометрическія числа индусовъ*.



Фиг. 1.

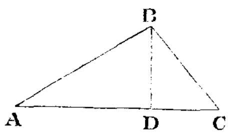
Изъ сказаннаго видно, что тригонометрическія числа грековъ и индусовъ справедливы при одномъ опредѣленномъ радіусѣ.

§ 2. При вычисленіяхъ перпендикуляры оказались удобнѣе хордъ, вслѣдствіе чего и вошли во всеобщее употребленіе. Отъ индусовъ онѝ перешли къ арабамъ [1]), а отъ этихъ послѣднихъ— къ намъ. Теперь, впрочемъ, употребляютъ не самый перпендикуляръ, а его отношеніе къ радіусу; причину это выяснимъ впослѣдствіи (§ 5), а теперь покажемъ, какъ можно, зная, это отношеніе, рѣшать треугольники.

Задача. *Вычислить площадь и углы треугольника ABC, въ которомъ $AB=5$ м., $AC=8$ м., $\angle A=30°$.*

Обозначимъ площадь чрезъ S; имѣемъ

$$S={}^1/_2\ AC.\ BD,$$



Фиг. 2.

гдѣ BD — высота. Изъ тригонометрическихъ таблицъ (§ 42 и слѣд.) найдемъ, что $\frac{BD}{AB}$ для угла A въ 30° равно $^1/_2$, слѣд., $BD={}^1/_2\ AB=2{,}5$ м., а потому $S={}^1/_4\ AC.\ AB=10$ кв. м. Изъ $\triangle\ ABD$ найдемъ, что $AD=4{,}33$ м. Далѣе, $DC=AC-AD=3{,}67$ м., а изъ $\triangle\ BDC$ найдемъ, что $BC=4{,}4$ м.

1) Самымъ древнимъ изъ арабскихъ астрономовъ, писавшихъ о тригонометріи, былъ Аль-Батани: въ своемъ сочиненіи „О движеніи звѣздъ“ онъ указываетъ преимущества употребленія перпендикуляровъ, которые у арабовъ назывались gaib; въ началѣ XII в. Платонъ Тибуртинскій перевелъ это сочиненіе на латинскій языкъ, передавъ слово gaib словомъ sinus (синусъ).

Для отысканія угла C замѣтимъ, что $\frac{BD}{BC} = 0{,}56$, а изъ таблицъ мы нашли бы, что такое отношеніе соотвѣтствуетъ углу въ $34°3'$, слѣд., $\angle C = 34°3'$.

§ 3. Измѣреніе угловъ. Углы измѣряютъ угломъ, принятымъ за единицу. Величину угла выражаютъ числомъ, показывающимъ отношеніе даннаго угла къ угловой единицѣ. Угловой единицей, кромѣ прямого угла (съ его частями—градусами), считаютъ еще центральный уголъ, дуга котораго равна радіусу своей окружности. Уголъ этотъ—величина постоянная. Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что центральные углы пропорціональны своимъ дугамъ, поэтому, обозначая новую угловую единицу черезъ m, а радіусъ чрезъ r, имѣемъ

$$d : m = \frac{\pi r}{2} : r, \text{ откуда } m = \frac{2d}{\pi}.$$

Теорема. *Мѣрой всякаго угла служитъ отношеніе его дуги къ ея радіусу, если угловой единицей считать центральный уголъ, дуга котораго равна своему радіусу.*

Обозначимъ величину даннаго угла чрезъ a, его дуги чрезъ b; имѣемъ

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{r}, \text{ но } m = 1, \text{ слѣд., } a = \frac{b}{r}.$$

Если положимъ, что угловой единицѣ соотвѣтствуетъ дуговая единица, какъ это мы дѣлали при выраженіи угловъ въ градусахъ, т. е. что при $m = 1$ и $r = 1$ (при этомъ абсолютная длина радіуса произвольна; она можетъ и не равняться линейной единицѣ—1 метру и т. п.), то изъ предыдущей пропорціи получимъ:

$$a = b,$$

т. е. *въ углѣ столько (a) разъ содержится угловая единица, сколько (b) разъ въ его дугѣ—дуговая* (радіусъ), или, короче, **числа, выражающія величины угла и его дуги, одинаковы.**

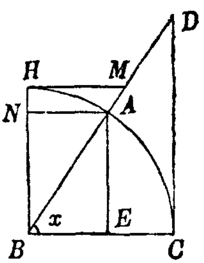
При помощи этой новой угловой единицы, называемой *радіаномъ*, прямой уголъ выразится числомъ $\frac{\pi}{2} = 1{,}5707..$, потому что въ его дугѣ $\frac{2\pi r}{4}$ радіусъ r содержится $\frac{\pi}{2}$ разъ; уголъ въ $45°$ выразится числомъ $\frac{\pi}{4}$, уголъ въ $30°$—числомъ $\frac{\pi}{6}$ и т. д.

Переходъ отъ одного выраженія угловъ къ другому совершается при помощи равенства $2\pi r = 360^\circ$, служащаго для перехода отъ градуснаго выраженія дугъ къ линейному, полагая въ немъ $r=1$.

§ 4. Тригонометрическія линіи. Данъ $\angle ABC = x$ (фиг. 3). Изъ вершины его опишемъ произвольнымъ радіусомъ дугу AC. Точку C будемъ называть *началомъ*, точку A—*концомъ* дуги, а радіусы BC и AB соотвѣтственно *начальнымъ* и *конечнымъ*. Изъ конца дуги опустимъ на BC перпендикуляръ AE и въ началѣ дуги проведемъ касательную CD до встрѣчи съ продолженіемъ конечнаго радіуса.

Прямыя AE, DC и BD называются линіями синуса, тангенса и секанса, т.-е. *линіей синуса называется перпендикуляръ изъ конца дуги на начальный радіусъ; линіей тангенса называется часть касательной въ началѣ дуги, считая ее отъ этого начала до встрѣчи съ продолженіемъ конечнаго радіуса; линіей секанса называется отрѣзокъ, соединяющій вершину угла съ концомъ линіи тангенса.*

Возставимъ въ B перпендикуляръ къ BC, получимъ $\angle ABH = \frac{\pi}{2} - x$. Уголъ ABH называется дополнительнымъ (углу ABC до $\frac{\pi}{2}$). Вообще, если сумма двухъ угловъ равна $\frac{\pi}{2}$ или 90°, то одинъ изъ нихъ называется *дополнительнымъ* другому. Ясно, что BH будетъ стороною всякаго дополнительнаго угла, а положеніе другой его стороны AB измѣняется съ измѣненіемъ величины даннаго угла ABC, поэтому BH будемъ называть начальнымъ радіусомъ, AB конечнымъ, а точки H и A—соотвѣтственно началомъ и концомъ дуги AH дополнительнаго угла.



Фиг. 3.

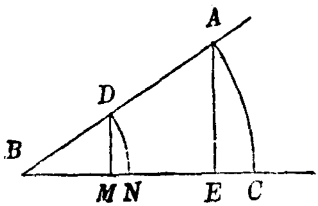
Прямыя AN, HM и BM, т.-е. *линіи синуса, тангенса и секанса дополнительнаго угла, называются линіями косинуса, котангенса и косеканса даннаго.*

Примѣчаніе. Такъ какъ $AN = BE$, то мы, въ силу нѣкоторыхъ удобствъ, будемъ впослѣдствіи называть *линіей косинуса* прямую BE, т.-е. *проекцію конечнаго радіуса на начальный.*

§ 5. Теорема. Отношеніе тригонометрическихъ линій угла къ радіусу дуги не зависятъ отъ величины радіуса.

Описавъ изъ вершины даннаго угла ABC (фиг. 4), какъ изъ центра, нѣсколько дугъ DN, AC и т. д., проведемъ линіи синуса DM, AE,... Изъ подобія треугольниковъ BDM, ABE,... находимъ:

$$\frac{DM}{BD}=\frac{AE}{BA}=\ldots,$$



Фиг. 4.

т.-е. это отношеніе есть величина постоянная для даннаго угла.

То же самое можно доказать относительно другихъ тригонометрическихъ линій.

§ 6. Тригонометрическія величины. Отношеніе тригонометрическихъ линій къ радіусу называются тригонометрическими величинами[1]) угла, каждое въ отдѣльности *синусомъ, тангенсомъ, секансомъ, косинусомъ, котангенсомъ, коссекансомъ*; въ письмѣ ихъ обозначаютъ такъ: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{sc} x$, $\operatorname{csc} x$.

Истину предъидущаго §-а можно выразить такъ: **у даннаго угла—одинъ синусъ, одинъ косинусъ,....**

§ 7. Сказанное въ § 5 показываетъ, что тригонометрическія величины можно брать при какомъ угодно радіусѣ. Такъ какъ при радіусѣ, равномъ 1 длины, тригонометрическія величины и длины соотвѣтствующихъ линій выражаются одинаковыми числами, то мы, считая радіусъ равнымъ 1, будемъ обыкновенно писать (фиг. 3):

$$AE=\sin x,\ DC=\operatorname{tg} x,\ BD=\operatorname{sc} x,$$
$$BE=\cos x,\ MH=\operatorname{ctg} x,\ BM=\operatorname{csc} x.$$

Примѣчаніе. Такъ какъ $AE=\cos(90^\circ-x)$, $BE=\sin(90^\circ-x)$ и т. д., то слѣд., $\sin(90^\circ-x)=\cos x$, $\cos(90^\circ-x)=\sin x$ и т. д.

§ 8. Соотношенія между тригонометрическими величинами остраго угла. Данъ $\angle ABC=x$ (фиг. 3). Проведемъ его тригонометрическія линіи. Изъ прямоугольнаго треугольника ABE имѣетъ:

$$AE^2+BE^2=AB^2 \quad \text{или} \quad \sin^2 x+\cos^2 x=1 \ \ldots . \ (1)$$

Изъ подобія треугольниковъ ABE и DBC имѣемъ

$$\frac{DC}{BC}=\frac{AE}{BE},\ \text{т.-е.}\ \frac{\operatorname{tg} x}{1}=\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}, \ . \ (2)$$

1) Иначе наз. тригонометрическими функціями. Функціей наз. величина, опредѣленнымъ образомъ зависящая отъ другой и одновременно съ нею измѣняющаяся, напр., окружность есть функція радіуса.

и $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BC}{BE}$, т.-е. $\dfrac{\mathrm{sc}\,x}{1} = \dfrac{1}{\cos x}$, откуда $\mathrm{sc}\,x \,.\, \cos x = 1$ . . . . (3)

Изъ подобія треугольниковъ ABE и HBM ($\angle HMB = \angle ABE$) имѣемъ

$\dfrac{HM}{BH} = \dfrac{BE}{AE}$, т.-е. $\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{1} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, откуда $\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ . . . . . . (4)

и $\dfrac{BM}{BH} = \dfrac{AB}{AE}$, т.-е. $\dfrac{\csc x}{1} = \dfrac{1}{\sin x}$, откуда $\csc x \,.\, \sin x = 1$ . . (5)

Эти 5 равенствъ связываютъ 6 тригонометрическихъ величинъ, слѣд., зная одну изъ нихъ, можно опредѣлить остальныя 5.

Изъ этихъ **пяти основныхъ независимыхъ соотношеній** между функціями одного и того же угла вытекаютъ всѣ остальныя. Покажемъ три наиболѣе употребительныя слѣдствія.

Умножая равенство (2) на (4) имѣемъ

$$\mathrm{tg}\,x \,.\, \mathrm{ctg}\,x = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Дѣля рав. (1) на $\sin^2 x$ и принимая во вниманіе рав. (4) и (5), имѣетъ

$$1 + \mathrm{ctg}^2 x = \csc^2 x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Дѣля рав. (1) на $\cos^2 x$ и принимая во вниманіе рав. (2) и (3), имѣетъ

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \mathrm{sc}^2 x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

§ 8, а. **Задача.** *Найти sin 30°, sin 45°, sin 60°.*

Если (фиг. 3) $x = 30°$, то $AE = {}^1/_2$ стороны правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ окружность радіуса AB, т.-е. $AE = {}^1/_2 AB$, слѣд., по § 6,

$$\sin 30° = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Если $x = 45°$, то $AE = {}^1/_2$ стороны квадрата, вписаннаго въ окружность радіуса AB, т.-е. $AE = {}^1/_2\, AB \sqrt{2}$, слѣд.,

$$\sin 45° = \frac{AE}{AB} = {}^1/_2\sqrt{2}$$

Далѣе, по § 7, $\sin 60° = \mathrm{cs}\ 30°$, но $\mathrm{cs}\ 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - {}^1/_4} = {}^1/_2\sqrt{3}$, слѣд., $\sin 60° = {}^1/_2\sqrt{3}$.

Задачи. **1**. Сколько градусовъ содержитъ уголъ, дуга котораго равна своему радіусу?

2. Выразить въ градусахъ углы ${}^1/_6\pi$; ${}^2/_3\pi$; π; 1,6; 0,987.

3. Доказать геометрически равенства (6), (7) и (8) §-а 8.

4. Доказать геометрически, что

a) $\mathrm{sc}\,a \,.\, \sin a = \mathrm{tg}\,a$, b) $\csc x = \mathrm{ctg}\,x \,.\, \mathrm{sc}\,x$

5. Построить уголъ x, зная, что

a) $\sin x = {}^1/_2$ b) $\cos x = {}^3/_4$, c) $\mathrm{tg}\,x = 1{}^1/_2$, b) $\mathrm{sc}\,x = 2$, e) $\mathrm{ctg}\,x = 0{,}3$.

6. Катетъ AE треугольника ABE (фиг. 4) равенъ 7 м., а гипотенуза $AB = 10$ м. Найти синусъ угла ABE.

Найти тригонометрическія функціи угла x, если

7. $\sin x = {}^5/_{13}$. **8**. $\cos x = {}^8/_{17}$. **9**. $\operatorname{tg} x = 1^1/_2$. **10**. $\operatorname{ctg} x = {}^3/_4$.
11. $\operatorname{sc} x = 2{,}6$. **12**. $\operatorname{csc} x = 2^1/_8$ **13**. $5\cos x = 4$. **14**. $4\operatorname{tg} x = 3$.
15. Найти $\cos 30°$, $\operatorname{tg} 30°$ и $\operatorname{sc} 30°$, зная, что $\sin 30° = {}^1/_2$.
16. Найти $\cos 45°$ и $\operatorname{tg} 45°$, зная, что $\sin 45° = {}^1/_2\sqrt{2}$.
17. Найти $2\operatorname{tg} x + \sin x$, полагая $\cos x = 0{,}5$.
18. Найти $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, полагая $\sin x = 0{,}6$.
19. Найти $\operatorname{tg} x + \operatorname{csc} x$, полагая $\operatorname{sc} x = 1{,}25$.
20. Найти $\cos x + \operatorname{ctg} x \, . \, \sin x$, полагая $\operatorname{tg} x = 0{,}75$.

Выразить

21. $\cos a$, $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{ctg} a$ чрезъ $\sin a$.
22. $\sin x$ и $\cos x$ черезъ $\operatorname{tg} x$.
23. $\operatorname{tg} x$, $\sin x$ и $\cos x$ чрезъ $\operatorname{ctg} x$.
24. $\operatorname{tg} x + \cos x$ чрезъ $\sin x$.
25. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ чрезъ $\operatorname{tg} x$.
26. $\cos^2 x + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ чрезъ $\sin x$.
27. $\operatorname{ctg}^2 a + \operatorname{sc}^2 a - \sin^2 a$ чрезъ $\cos a$.

Показать справедливость слѣдующихъ тождествъ[1]):

28. $\cos a \, . \, \operatorname{tg} a = \sin a$.
28a. $\sin x \, . \, \operatorname{ctg} x = \operatorname{cs} x$.
29*. $\sin a \; \operatorname{sc} a = \operatorname{tg} a$.
29a. $\operatorname{cs} a \, . \, \operatorname{csc} a = \operatorname{ctg} a$.
30. $\operatorname{csc} a = \operatorname{ctg} a \, . \, \operatorname{sc} a$.
31. $\operatorname{ctg} a \; \sin a \; \operatorname{sc} a = 1$.
32*. $\operatorname{tg} x \; \operatorname{csc} x \; \cos x = 1$.
33. $\sin^2 a \, (1 + \operatorname{ctg}^2 a) = 1$.
34*. $(\operatorname{tg}^2 a + 1) \cos^2 a = 1$.
35*. $\sin^2 a + \operatorname{ctg}^2 a \; \sin^2 a = 1$.
36. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x \, (1 + \operatorname{ctg}^2 x)$.
37*. $\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} a \, (1 + \operatorname{tg}^2 a)$.
38 $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x \, . \, \operatorname{csc}^2 x = \operatorname{ctg} x \, . \, \operatorname{sc}^2 x$.
39. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{sc} x \, . \, \operatorname{csc} x$.
40. $(1 - \sin^2 a)(\operatorname{tg}^2 a + 1) = 1$.

[1]) См. § 74. При повѣркѣ тождествъ примѣняютъ обыкновенно одинъ изъ слѣдующихъ двухъ способовъ: 1) одну часть тождества преобразовываютъ въ другую, 2) обѣ части тождества преобразовываютъ въ одно и тоже третье выраженіе; при этомъ пользуются основными тождествами § 8 и др

Повѣримъ тождество $\operatorname{sc}^2 a - 1 = \operatorname{sc}^2 a \, . \, \sin^2 a$.

1-й способъ. Беря въ лѣвой части $\operatorname{sc} a$ за скобки, имѣемъ

$$\operatorname{sc}^2 a \left(1 - \frac{1}{\operatorname{sc}^2 a}\right) = \operatorname{sc}^2 a \; \sin^2 a$$

или, замѣняя въ скобкахъ $\dfrac{1}{\operatorname{sc} a}$ на $\cos a$ (рав. 3-е § 8),

$$\operatorname{sc}^2 a \, (1 - \cos^2 a) = \operatorname{sc}^2 a \; \sin^2 a,$$

или, замѣняя $1 - \cos^2 a$ на $\sin^2 a$ (рав. 1-е § 8)

$$\operatorname{sc}^2 a \; \sin^2 a = \operatorname{sc}^2 a \; \sin^2 a.$$

2-й способъ. Подставляя въ лѣвую часть $1 + \operatorname{tg}^2 a$ вм. $\operatorname{sc}^2 a$ (рав. 8-е § 8), а въ правую $\dfrac{1}{\cos a}$ вм. $\operatorname{sc} a$, получимъ

$$\operatorname{tg}^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a},$$

откуда по рав. 3-му § 8 имѣемъ

$$\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg}^2 a.$$

41*. $(1+\mathrm{ctg}^2x)(1-\cos^2x)=1$.

42. $\mathrm{sc}^2a\ \sin^2a+1=\mathrm{sc}^2a$.

43*. $\mathrm{tg}^2a\ \csc^2a-1=\mathrm{tg}^2a$.

44. $(1+\mathrm{tg}\,a)^2+(1-\mathrm{tg}\,a)^2=2\mathrm{sc}^2a$.

45*. $(\mathrm{ctg}\,x+1)^2+(\mathrm{ctg}\,x-1)^2=2\csc^2x$.

46. $\mathrm{tg}^2x-\mathrm{ctg}^2x=\mathrm{sc}^2x-\csc^2x$.

47. $\dfrac{\cos a\ .\ \mathrm{tg}^2a}{\sin a}=\mathrm{tg}\,a$

48*. $\dfrac{\sin x\ .\ \mathrm{ctg}^2x}{\cos x}=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}$

49. $\dfrac{1}{\cos^2a}-\dfrac{1}{\mathrm{ctg}^2a}=1$.

50. $\dfrac{\mathrm{sc}\,x}{\cos x}-\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{ctg}\,x}=1$.

51. $\dfrac{1}{1+\sin a}+\dfrac{1}{1-\sin a}=\dfrac{2}{\cos^2a}$.

52. $\cos^2x-\sin^2x=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}$.

53. $\mathrm{sc}\,a-\cos a=\sin a\ \mathrm{tg}\,a$.

54*. $\csc a-\sin a=\cos a\ \mathrm{ctg}\,a$.

55. $\mathrm{tg}\,a-\sin a=\mathrm{tg}\,a\ (1-\cos a)$.

56. $\mathrm{sc}^2x+\csc^2x=\mathrm{sc}^2x\ .\ \csc^2x$.

57. $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2a}{\mathrm{tg}^2a}=\dfrac{\csc^2a-\mathrm{sc}^2a}{\mathrm{sc}^2a}$.

58. $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2a}{1-\mathrm{tg}^2a}=\dfrac{1}{2\cos^2a-1}$.

59. $\dfrac{\mathrm{ctg}^2a\ (1+\mathrm{tg}^2a)}{1+\mathrm{ctg}^2a}=1$.

60. $\dfrac{\mathrm{ctg}\,a-\cos a}{\mathrm{ctg}\,a}=1-\sin a$.

61. $\dfrac{\mathrm{ctg}\,x+1}{\mathrm{ctg}\,x-1}=\dfrac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}$.

62. $\dfrac{1}{\csc a+2\,\mathrm{ctg}\,a}=\dfrac{\sin a}{1+2\cos a}$.

63. $\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2x}\ .\ \dfrac{\mathrm{ctg}^2x-1}{\mathrm{ctg}\,x}=1$.

64. $\dfrac{\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}\ .\ \dfrac{1+\mathrm{ctg}^2x}{\mathrm{ctg}^2x}=\mathrm{tg}^2x$.

65. $\dfrac{1-2\cos^2x}{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x}=\sin x\ .\ \cos x$.

66. $\dfrac{\sin a+\mathrm{tg}\,a}{\mathrm{ctg}\,a+\csc a}=\mathrm{tg}\,a\ \sin a$.

67. $\sin a\ \mathrm{ctg}\,a=\sin(90^\circ-a)$.

68. $\mathrm{tg}\,a\ \mathrm{tg}\,(90^\circ-a)=1$.

69. $\mathrm{ctg}\,(90^\circ-a)=\sin a\ \mathrm{sc}\,a$.

70. $\cos(90^\circ-a)=\sin(90^\circ-a)\ \mathrm{tg}\,a$.

71. Синусъ одного изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника равенъ 0,8. Найти косинусъ и синусъ другого.

72. Зная, что $\sin 30^\circ=0{,}5$, найти $\mathrm{cs}\ 60^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\mathrm{tg}\ 60^\circ$ (§ 7).

Рѣшить уравненія

73. $\sin^2x+\sin x=0{,}96$.

74. $\sin x=3\sin^2x$.

75*. $2\sin^2x-3\sin x+a=0$.

76*. $\cos^2x-5\cos x+2{,}25=0$.

77*. $\mathrm{tg}^2x+10=7\ \mathrm{tg}\,x$.

78*. $\sin a\ \mathrm{tg}^2x-2\cos a\ \mathrm{tg}\,x+1=0$.

79. $2\cos x=\sin^2x$.

80*. $3\sin^2x+4\cos^2x=3$.

81*. $\cos^2x=\sin x$.

82. $3\sin x=2\cos^2x$.

83*. $\sin^2x+\sin x+2\cos^2x=2^1/_4$.

84. $\cos^2x-\sin^2x=0{,}2$.

85*. $\sin x+2\cos^2x=1{,}88$.

86. $\sin x+\cos x=1{,}4$.

87. $4\cos x+3\sin x=5$.

88. $12\sin x=5\cos x+3{,}2$.

89. $9-5\sin x=4\csc x$.

90. $2\sin x-\cos x=1$.

91. $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=2^1/_6$.

92*. $\mathrm{ctg}\,x+a\ \mathrm{tg}\,x=b$.

93. $\mathrm{tg}\,x=b\ \mathrm{ctg}\,x$.

94. $\mathrm{ctg}^2x=1{,}25-\mathrm{tg}^2x$.

95*. $\mathrm{tg}^2x-4\ \mathrm{ctg}^2x=3$.

96. $\sin x+\mathrm{tg}^2x={}^5/_{12}$.

97*. $\mathrm{tg}^2x-\sin^2x={}^1/_{12}$.

98 $\mathrm{tg}\,x=3\cos x$.

99*. $\sin x=\mathrm{ctg}\,x$.

100. $\sin x-\cos x=0$.

101. $25\sin x\cos x=12$.

102. $\cos x-\sin x=\sin x\cos x$.

103. $25(\mathrm{tg}^2x-1)=4(1-\mathrm{ctg}\,x)$.

104. $\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x=\mathrm{sc}\,x$.

105. $\mathrm{cs}x+\mathrm{csc}x=2\,{}^7/_{15}$.

106. $a\cos x+b\sin x=c$.

107. Найти условіе дѣйствительности корней уравненія $x^2\sin a-2x\cos a+\sin a=0$.

108. $\mathrm{tg}x-2\,\mathrm{ctg}x=0$.

109. $\sin x\ \mathrm{tg}x=1$.

110. $\sin x\ \mathrm{tg}x+2\cos x=m$.

111. $3\,\mathrm{sc}^2x+2=8\,\mathrm{tg}x$.

112. $3\cos^2x=2\sin x\cos a$.

113. $\dfrac{1}{\sin^2x}+\dfrac{2}{\sin x}=a$.

114. $\cos^2x=p+\sin x$.

115. $\cos^2x-\sin^2x+\mathrm{tg}^2x={}^5/_6$.

116. $a\sin x=b\,\mathrm{csc}x$.

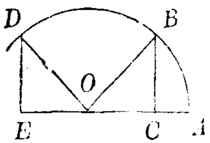
117. $2\sin^2x-\sin x\cos x=3\cos^2x$.

118. $3\cos^2x+\sin x\cos x=1$.

119. $\sin^2x+\sin x\cos x=0{,}84$.

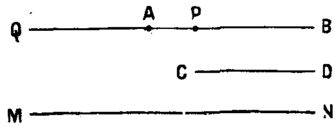
ГЛАВА II.

§ 9. Какъ сказано въ § 1, при рѣшеніи треугольниковъ намъ придется по данному углу опредѣлять какую-нибудь его тригонометрическую функцію и, обратно, по функціи опредѣлять уголъ. Первый вопросъ, имѣетъ, какъ сказано въ § 6, одно рѣшеніе. Посмотримъ теперь, сколько рѣшеній имѣетъ второй вопросъ. Положимъ, что данъ $\cos x$, а найти надо x. Для построенія x мы должны изъ точки O (фиг. 5) нѣкоторой прямой описать дугу радіусомъ, равнымъ 1, и, отложивъ $OC=\cos x$ на начальномъ радіусѣ OA, возставить къ OA изъ C перпендикуляръ до встрѣчи съ дугою въ B; $\angle BOB=x$; если же отложимъ на томъ же радіусѣ, но въ противоположную сторону, $OE=\cos x$ и возставимъ изъ E перпендикуляръ до встрѣчи съ дугою D, то получимъ $\angle AOD=x$.



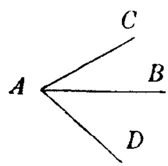
Фиг. 5.

Такимъ образомъ, вопросу одинаково удовлетворяютъ острый $\angle AOB$ и тупой $\angle AOD$. Для устраненія подобной неопредѣленности поступаютъ такъ. Если на прямой или кривой линіи дана постоянная точка (въ предыдущемъ примѣрѣ точка O) и желаютъ отложить отрѣзки въ обѣ стороны отъ нея, то отрѣзки, отложенные въ одну сторону, выражаютъ числами положительными, а въ противоположную—отрицательными. Неподвижная точка называется *началомъ*. Выражать положительными и отрицательными числами величины отрѣзковъ, откладываемыхъ отъ начала въ противоположныя стороны, условились на основаніи слѣдующихъ соображеній. Извѣстно, что отрицательное число есть разность, въ которой уменьшаемое меньше вычитаемаго; съ другой стороны, вычитаніе отрѣзковъ производится откладываніемъ вычитаемаго отрѣзка на уменьшаемомъ **отъ** одного конца этого послѣдняго къ другому. Отрѣзокъ, выражающій разность, можетъ лежать по ту или другую сторону изъ **конца** уменьшаемаго отрѣзка. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что изъ прямой AB надо вычесть CD ($AB > CD$). Отложивъ CD отъ B къ A, получимъ разность AP (фиг. 6), отложенную вправо отъ A. Если бы изъ AB надо было вычесть MN ($AB < MN$), то поступая по предыдущему, нашли бы для этого случая разность AQ, отложенную влѣво отъ A. Выражая отрѣзки AB, CD и MN числами, мы найдемъ, что разность AP выражается положительнымъ числомъ, а AQ— отрицательнымъ. Если бы откладывали CD и MN отъ A къ B, то отрѣзокъ лежащій влѣво отъ B, выразился бы положительнымъ числомъ, а лежащій вправо—отрицательнымъ. Поэтому, во избѣжаніе недоразумѣній, мы должны условиться (§ 14), въ какую сторону отъ начала будемъ откладывать отрѣзки, выражаемые положительными числами.



Фиг. 6.

§ 10. Сказанное въ § 9 о линіяхъ относится и къ угламъ. Углы, отложенные въ одну сторону отъ неподвижной прямой (AB), какъ, напр., $\angle CAB$, выражаютъ положительными числами, а отложенные въ противоположную, какъ, напр., $\angle DBA$ (фиг. 7), отрицательными.

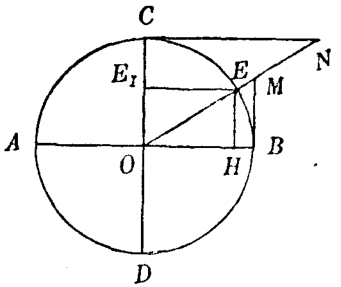


Фиг. 7.

§ 11. Обобщеніе понятія объ углѣ. При рѣшеніи треугольниковъ мы будемъ имѣть дѣло съ острыми и тупыми углами, но въ другихъ отдѣлахъ математики разсматриваютъ углы всѣхъ возможныхъ величинъ, воображая слѣдующимъ образомъ происхожденіе угловъ. Предположимъ, что сторона AC, совпадавшая прежде съ AB, начала вращаться около точки A въ направленіи, обратномъ движенію часовыхъ стрѣлокъ; въ такомъ случаѣ уголъ, увеличиваясь, будетъ послѣдовательно принимать всѣ назначенія отъ $0°$ до ∞. Если вращеніе совершается въ направленіи часовыхъ стрѣлокъ, то уголъ принимаетъ всевозможныя значенія отъ $0°$ до $-\infty$.

§ 12. Изслѣдуя знаки тригонометрическихъ величинъ какого-

нибудь угла, мы будемъ воображать его центральнымъ въ кругѣ,



Фиг. 8.

радіусъ котораго $= 1$. Кругъ будемъ дѣлить двумя взаимно перпендикулярными діаметрами AB и CD (фиг. 8) на части BOC, COA, AOD и DOB, называемыя соотвѣтственно 1-ою, 2-ою, 3-ею и 4-ою четвертями. За начальный радіусъ дуги даннаго угла можно принять, конечно, любой радіусъ окружности; мы условимся начальнымъ радіусомъ считать OB для всѣхъ угловъ съ цѣлью сдѣлать ихъ сравнимыми между собою; въ такомъ случаѣ радіусъ OC (§ 4) будетъ начальнымъ радіусомъ дугъ дополнительныхъ угловъ.

§ 13. Линію синуса EH даннаго угла BOE (фиг. 8) можно замѣнить ей равной прямой OE_1, отложенной отъ центра на діаметрѣ CD. Въ зависимости отъ величины даннаго угла прямая OE_1 можетъ откладываться на діаметрѣ CD по ту или другую сторону центра; поэтому центръ есть начало для линій синусовъ, которыя могутъ выражаться положительными и отрицательными числами.

Линіи косинусовъ могутъ быть отложены, смотря по величинѣ угла, вправо и влѣво отъ центра (фиг. 5) на діаметрѣ AB; поэтому ихъ тоже можно выражать положительными и отрицательными числами, а центръ есть ихъ общее начало.

Линіи тангенсовъ начинаются въ точкѣ B, а котангенсовъ въ точкѣ C и могутъ быть отложены въ обѣ стороны по направленію касательныхъ, проведенныхъ чрезъ эти точки, слѣд., онѣ могутъ выражаться положительными и отрицательными числами; началомъ для первыхъ служитъ точка B, для которыхъ—точка C.

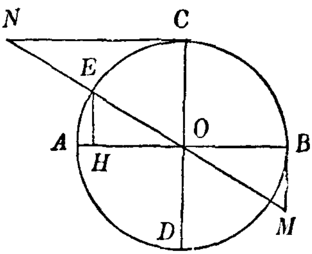
Началомъ для линій секансовъ и косекансовъ служитъ центръ круга, отъ котораго онѣ могутъ откладываться по направленію конечнаго радіуса или противоположную сторону, слѣд., эти линіи могутъ выражаться положительными и отрицательными числами.

§ 14. Условія относительно знаковъ тригонометрическихъ функцій. Принимая во вниманіе сказанное въ § 13 и § 9, условимся выражать положительными числами: 1) линіи **синусовъ и тангенсовъ**, когда онѣ откладываются **вверхъ отъ** начала O и B (чертежъ предполагается лежащимъ въ вертикальной плоскости); 2) линіи **косинусовъ и котангенсовъ**, когда онѣ отложены **вправо** отъ начала O и C; 3) линіи **секансовъ и косекансовъ**, когда онѣ проходятъ **чрезъ конецъ дуги.**

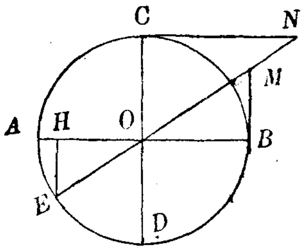
Примѣчаніе. Знаки тригонометрическихъ величинъ будутъ, конечно, тѣ же, что у соотвѣтствующихъ тригонометрическихъ линій.

§ 15. Знаки тригонометрическихъ функцій. Согласно нашему условію (§ 14), знаки тригонометрическихъ величинъ по четвертямъ слѣдующіе (фиг. 8, 9, 10 и 11).

	1	2	3	4
синусъ	$+EH$	$+EH$	$-EH$	$-EH$
тангенсъ.	$+BM$	$-BM$	$+BM$	$-BM$
секансъ	$+OM$	$-OM$	$-OM$	$+OM$
косинусъ	$+OH$	$-OH$	$-OH$	$+OH$

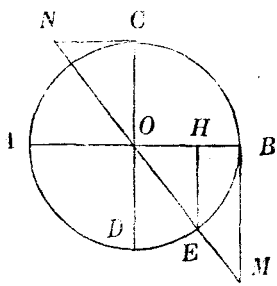


Фиг. 9.



Фиг. 10.

Для опредѣленія знаковъ котангенса и косеканса мы должны построить дополнительный уголъ. Положимъ, что $\angle BOE = x$; дополнительный уголъ $= \frac{\pi}{2} - x$. Если $x < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} - x > 0$ и откладывается отъ OC по направленію часовыхъ стрѣлокъ (§ 4); если же $x > \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} - x < 0$, а, слѣд. (§ 10), его мы должны отложить отъ OC въ направленіи, обратномъ движенію часовыхъ стрѣлокъ. Итакъ, **положительное направленіе дополнительныхъ угловъ противоположено положительному направленію данныхъ угловъ.** Далѣе, конецъ дуги дополнительнаго угла всегда совпадаетъ съ концомъ дуги даннаго угла. Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что E есть конецъ дуги даннаго угла BOE (фиг. 8, 9, 10 и 11); конецъ дуги дополнительнаго угла $\frac{\pi}{2} - x$ найдемъ слѣдующимъ образомъ: от-



Фиг. 11.

ложимъ отъ начала C дугъ дополнительныхъ угловъ въ положительномъ направленіи (по часовой стрѣлкѣ) дугу $\frac{\pi}{2}=CB$, а изъ нея вычтемъ дугу x, т.-е. отложимъ дугу $x=BE$ въ отрицательномъ направленіи (противъ часовой стрѣлки); такимъ образомъ придемъ въ точку E. Если x—число отрицательное, напр., $x=-k$, то $\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}+k$; въ такомъ случаѣ дугу x надо, конечно, откладывать въ положительномъ направленіи; такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ придемъ въ точку E. На основаніи сказаннаго $\angle COE$ есть уголъ дополнительный углу BOE, а потому § (4)

$$CN=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \text{ или } =\operatorname{ctg} x, \text{ а}$$

$$ON=\operatorname{sc}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \text{ или } =\operatorname{csc} x.$$

Согласно условію относительно знаковъ котангенса и косеканса (§ 14) имѣемъ:

	1	2	3	4
котангенсъ	$+CN$	$-CN$	$+CN$	$-CN$
косекансъ	$+ON$	$+ON$	$-ON$	$-ON$

§ 16. Формулы соотношеній для какого угодно угла.

Докажемъ, что равенства § 8 справедливы для всѣхъ угловъ.

I. $\triangle\ EOH$ всегда прямоугольный, слѣд., равенство (1) справедливо. Далѣе $EH \perp AB$, слѣд., всегда $\triangle\ HOE \sim \triangle\ MOB$, а потому имѣютъ мѣсто рав. (2) и (3). Наконецъ, $EH \parallel CD$, а $CN \parallel AB$, слѣд., всегда $\triangle\ EHO \sim \triangle\ CNO$, а потому имѣютъ мѣсто рав. (4) и (5). Равенства (6), (7) и (8), какъ слѣдствія справедливыхъ равенствъ, тоже справедливы. Знаки тригонометрическихъ функцій не оказываютъ вліянія на видъ равенствъ. Въ самомъ дѣлѣ, рав. (3), (5) и (6) показываютъ, что знаки косинуса и секанса, синуса и косеканса, тангенса и котангенса попарно одинаковы; рав. (2) и (4) показываютъ, что тангенсъ и котангенсъ положительны, когда синусъ и косинусъ имѣютъ одинаковые знаки (правило знаковъ при дѣленіи), и отрицательны, когда знаки синуса и косинуса разные, а это все справедливо, какъ видно изъ таблицы § 15. На основаніи только что сказаннаго **легко помнить знаки**

тригонометрическихъ величинъ по четвертямъ, помня знаки синуса и косинуса, напр., во 2-й четверти знакъ синуса $+$, знакъ косинуса —, поэтому въ силу рав. (5) § 8 знакъ косеканса $+$, въ силу рав. (3) знакъ секанса—, въ силу рав. (2) и (4) знакъ тангенса и котангенса—.

Разсмотримъ для примѣра указанную примѣнимость равенствъ (1) и (2) § 8 къ углу BOE (фиг. 9) второй четверти.

Прямоугольный треугольникъ EOH даетъ

$$EH^2 + OH^2 = OE^2$$

Для угла $BOE = x$, для котораго $\sin x = EH$ и $\cos x = -OH$, это равенство можно написать въ видѣ

$$EH^2 + (-OH)^2 = OE^2 \quad \text{или}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Далѣе, $\triangle\ BOM$ со $\triangle\ EOH$, поэтому

$$\frac{BM}{OB} = \frac{EH}{OH}$$

Для угла $BOE = x$, для котораго $\sin x = EH$, $\cos x = -OH$ и $\operatorname{tg} x = -BM$, это равенство можно написать въ видѣ

$$\frac{-BM}{OB} = \frac{EH}{-OH} \quad \text{или}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

II. Покажемъ, что равенства § 8 справедливы для угловъ 0, $\frac{\pi}{2}$, π и т. д., т.-е. и тогда, когда $\triangle\triangle\ EOH$, MOB,... исчезаютъ. Разберемъ случай, когда $x=0$. По мѣрѣ уменьшенія угла BOE прямыя EH, MB и OM уменьшаются, а OH, CN и ON увеличиваются, при чемъ точка N отодвигается безпредѣльно, и прямыя ON и CN могутъ быть сдѣланы какъ угодно большими. Когда x обращается въ нуль, т.-е. E совпадаетъ съ B, то EH и MB обращается въ нуль, OM и OH дѣлаются равными радіусу, а CN и ON не пересѣкаются между собою, потому что радіусъ OE, совпадая съ OB, становится параллельнымъ прямой CN, или, какъ говорятъ, пересѣкаетъ ее въ безконечности. Итакъ, $\sin 0=0$, $\operatorname{tg} 0=0$, $\operatorname{cs} 0=1$, $\operatorname{ctg} 0=+\infty$ и $\operatorname{csc} 0=+\infty$. Эти значенія и получаются изъ равенствъ § 8.

Выраженія въ родѣ ctg $0 = \infty$ надо понимать не буквально, а въ томъ смыслѣ, что котангенсъ безпредѣльно увеличивается по мѣрѣ того, какъ уголъ безпредѣльно приближается къ нулю.

Подобными разсужденіями доказывается справедливость равенствъ § 8 для какого угодно угла.

§ 17. Измѣненіе тригонометрическихъ величинъ при непрерывномъ возрастаніи угла отъ 0 до 2π. Разсужденія, приведенныя въ § 16, II, показываютъ, что съ возрастаніемъ угла отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$

синусъ растетъ	отъ	0	до	$+1$
тангенсъ „	„	0	„	$+\infty$
секансъ „	„	$+1$	„	$+\infty$
косинусъ уменьшается	отъ	$+1$	до	0
котангенсъ „	„	$+\infty$	„	0
косекансъ „	„	$+\infty$	„	1,

при переходѣ же угла изъ 1-й четверти во 2-ю прямыя *BM* и *OM* (фиг. 9) дѣлаются параллельными одна другой и идутъ въ отрицательномъ направленіи, слѣд., тангенсъ и секансъ, оставаясь по абсолютной величинѣ больше какого угодно количества, переходятъ съ $+\infty$ въ $-\infty$.

Съ возрастаніемъ угла отъ $\frac{\pi}{2}$ до π

синусъ уменьшается	отъ	$+1$	до	0
тангенсъ растетъ	„	$-\infty$	„	0
секансъ „	„	$-\infty$	„	-1
косинусъ уменьшается	„	0	„	-1
котангенсъ „	„	0	„	$-\infty$
косекансъ растетъ	„	$+1$	„	$+\infty$,

при переходѣ же изъ 2-й четверти въ 3-ю котангенсъ переходитъ съ $-\infty$ въ $+\infty$, а косекансъ съ $+\infty$ въ $-\infty$.

Съ возрастаніемъ угла отъ π до $^3/_2\,\pi$.

синусъ уменьшается	отъ	0	до	-1
тангенсъ растетъ	„	0	„	$+\infty$
секансъ уменьшается	„	-1	„	$-\infty$
косинусъ растетъ	„	-1	„	0
котангенсъ уменьшается	„	$+\infty$	„	0
косекансъ растетъ	„	$-\infty$	„	-1,

при переходѣ же угла изъ 3-четверти въ 4-ю тангенсъ переходитъ съ $+\infty$ въ $-\infty$, а секансъ съ $-\infty$ въ $+\infty$.

Съ возрастаніемъ угла $^3/_2\ \pi$ до $2\ \pi$

синусъ растетъ	отъ	-1	до	0
тангенсъ „	„	$-\infty$	„	0
секансъ уменьшается	„	$+\infty$	„	$+1$
косинусъ растетъ	„	0	„	$+1$
котангенсъ уменьшается	„	0	„	$-\infty$
косекансъ „	„	-1	„	$-\infty$

При дальнѣйшемъ увеличеніи угла (переходъ въ 5-ю четверть) котангенсъ и косекансъ переходятъ съ $-\infty$ въ $+\infty$, и всѣ тригонометрическія величины измѣняются въ прежнемъ порядкѣ.

Резюмируя все сказанное, видимъ, что

1) **синусъ** и **косинусъ** непрерывно измѣняются отъ $+1$ до -1, т.-е. они **всегда правильныя дроби**;

2) **тангенсъ** и **котангенсъ** измѣняются отъ $+\infty$ до $-\infty$, принимая **всевозможныя цѣлыя и дробныя** значенія;

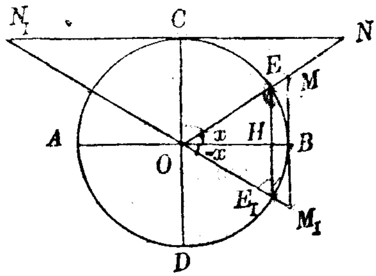
3) **секансъ** и **косекансъ** измѣняются отъ $+1$ до $+\infty$, и отъ -1 до $-\infty$, т.-е. **не бываютъ правильными дробями.**

Формулы приведенія.

§ 18. Для опредѣленія тригонометрическихъ величинъ какого угодно угла достаточно знать тригонометрическія величины угловъ меньшихъ 45° и слѣдующія *формулы приведенія.*

§ 19. Связь между тригонометрическими величинами угловъ. x и $-x$.

Даны $\angle BOE = x$ и $\angle BOE_1 = -x$ (фиг. 12). При всякомъ x точки E и E_1, симметричны относительно діаметра AB, т.-е. лежатъ на концахъ хорды EE_1 перпендикулярной къ AB. Дополнительные углы будутъ COE и COE_1; поэтому



Фиг. 12.

$E_1H = \sin(-x)$, $OH = \cos(-x)$, $M_1B = \text{tg}(-x)$.

$CN_1 = \text{ctg}\ (-x)$, $OM_1 = \text{sc}\ (-x)$ и $ON_1 = \csc\ (-x)$.

Такъ какъ прямоугольные $\triangle\triangle$ OEH и OE_1H, OMB и OM_1B, OCN и OCN_1 попарно равны, то, по абсолютнымъ значеніямъ, $EH = E_1H$, $MB = M_1B$, $OM = OM_1$, $CN = CN_1$ и $ON = ON_1$, и мы при условіяхъ § 14 имѣемъ

$$\sin(-x) = -\sin x,\quad \text{tg}\ (-x) = -\text{tg}\, x,\quad \text{sc}\ (-x) = \text{sc}\, x;$$

$$\cos(-x) = \cos x,\quad \text{ctg}\ (-x) = -\text{ctg}\, x,\quad \csc\ (-x) = \csc x.$$

§ 20. Связь между тригонометрическими величинами угловъ x и $2k\pi + x$.

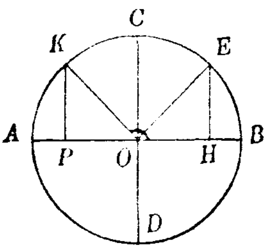
Данъ $\angle BOE = x$ или $\angle BOE_1 = -x$ (фиг. 12). Если конецъ E (или E_1) дуги даннаго угла пройдетъ одну, двѣ и т. д. окружностей въ положительномъ или отрицательномъ направленіи, то придетъ въ прежнее положеніе, поэтому тригонометрическія величины угловъ $2\pi + x$, $4\pi + x, \ldots$ и $-2\pi + x$, $-4\pi + x$, будутъ имѣть прежнія значенія; всѣ эти углы можно выразить формулою $2k\pi + x$, гдѣ k и x могутъ быть и > 0 и < 0. Итакъ,

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x,\quad \text{tg}\ (2k\pi + x) = \text{tg}\, x,\quad \text{sc}\ (2k\pi + x) = \text{sc}\, x,$$

$$\cos(2k\pi + x) = \cos x\quad \text{ctg}\ (2k\pi + x) = \text{ctg}\, x,\quad \csc\ (2k\pi + x) = \csc x.$$

§ 21. Связь между тригонометрическими величинами угловъ $\pi - x$ и x (пополнительныхъ).

Данъ $\angle BOE = x$ (фиг. 13). Для того, чтобы построить уголъ $\pi - x$, мы должны отъ B отложить въ положительномъ направленіи до точки A дугу π и отъ A въ отрицательномъ направленіи ко K дугу x. Ясно, что при всякой величинѣ x точки K и E лежатъ на концахъ хорды параллельной діаметру AB, поэтому $\triangle EOH = \triangle KOP$ и слѣд., по абсолютнымъ значеніямъ,



Фиг. 13.

$$KP = EH \text{ и } OP = OH,$$

принимая же во вниманіе знаки (§ 14), имѣемъ

$$\sin(\pi - x) = \sin x,\quad \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

По § 8 (см. § 16) имѣемъ

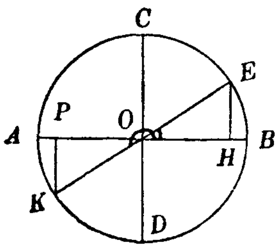
$$\text{tg}(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\text{tg}\, x$$

$$\operatorname{sc}(\pi-x)=\frac{1}{\cos(\pi-x)}=\frac{1}{-\cos x}=-\operatorname{sc}x.$$

Такъ же точно найдемъ, что

$$\operatorname{ctg}(\pi-x)=-\operatorname{ctg} \text{ и } \csc(\pi-x)=\csc x.$$

§ 22. Связь между тригонометрическими величинами угловъ $\pi+x$ и x.



Фиг. 14.

Ясно, что концы E и K (фиг. 14) дугъ угловъ $\pi+x$ и x лежатъ на концахъ одного и того же діаметра KE, поэтому $\triangle EOH=\triangle KOP$, слѣд., по абсолютнымъ значеніямъ, $KP=EH$ и $OP=OH$.

Принимая во вниманіе знаки (§ 14), имѣемъ

$$\sin(\pi+x)=-\sin x \text{ и}$$
$$\cos(\pi+x)=-\cos x.$$

По § 8 (см. § 16) имѣемъ

$$\operatorname{tg}(\pi+x)=\frac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\operatorname{tg}x,$$

$$\operatorname{sc}(\pi+x)=\frac{1}{\cos(\pi+x)}=\frac{1}{-\cos x}=-\operatorname{sc}x.$$

Такъ же точно найдемъ, что

$$\operatorname{ctg}(\pi+x)=\operatorname{ctg}x \text{ и } \csc(\pi+x)=-\csc x.$$

§ 23. Связь между тригонометрическими величинами угловъ $2\pi-x$ и x.

Такъ какъ концы дугъ угловъ $2\pi-x$ и $-x$ (фиг. 12) совпадаютъ (§ 20), то и тригонометрическія величины этихъ угловъ одинаковы, слѣд., по § 19 имѣемъ

$$\sin(2\pi-x=-\sin x,\quad \operatorname{tg}(2\pi-x)=-\operatorname{tg}x,\quad \operatorname{sc}(2\pi-x)=\operatorname{sc}x,$$

$$\cos(2\pi-x)=\cos x,\quad \operatorname{ctg}(2\pi-x)=-\operatorname{ctg}x,\quad \csc(2\pi-x)=-\csc x.$$

§ 24. Связь между тригонометрическими величинами угловъ $\frac{\pi}{2}+x$ и x.

Замѣняя x въ формулахъ § 21 на $\frac{\pi}{2}-x$, имѣемъ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \text{ или } =\cos x.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \text{ или } =-\sin x;$$

далѣе по § 8, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg}x,\quad \csc\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\csc x,$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{tg}x,\quad \csc\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\operatorname{sc}x.$$

Предлагаемъ учащимся доказать эту связь при помощи чертежа.

§ 25. Общее замѣчаніе. Всѣ формулы приведенія выведены для какого угодно значенія x. Ихъ легко помнить, руководствуясь слѣдующимъ правиломъ: если сумма или разность угловъ содержитъ *четное* число разъ $\frac{\pi}{2}$ или 90° (§§ 20, 21, 22 и 23), то названія тригонометрическихъ величинъ сохраняются, напр.,

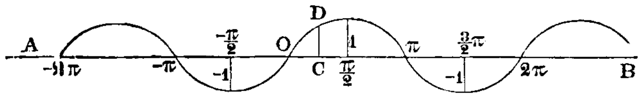
$$\sin(\pi+x)=-\sin x,\quad \operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg}x,$$

если же сумма или разность угловъ содержитъ *нечетное* число разъ $\frac{\pi}{2}$ то названія тригонометрическихъ величинъ замѣняются сходными (синусъ косинусомъ и т. п.), напр,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg}x.$$

§ 26. Періодичность тригонометрическихъ функцій. Тангенсъ и котангенсъ не измѣняются (§ 22) при увеличеніи угла на $\pm\pi$, а остальныя тригонометрическія величины—при увеличеніи угла на $\pm 2\pi$ (§ 20). Это свойство наз. *періодичностью.* Функція наз. *періодическою,* если ея значенія для двухъ значеній аргумента (перемѣннаго, отъ котораго оно зависитъ) x и $x+a$, гдѣ a—данное число, равны между собою при всякомъ x. Число a наз. *періодомъ.* Итакъ, *тригонометрическія функціи суть функціи періодическія;* π—періодъ для тангенса и котангенса, 2π—для другихъ функцій.

Періодичность тригонометрическихъ функцій можно обнаружить графически. Разсмотримъ измѣненіе синуса. Для этого на произвольной прямой AB отъ начала O будемъ откладывать въ обѣ стороны отрѣзки, соотвѣтствующіе угламъ по величинѣ и по знаку (вправо положительные), а въ направленіи перпен-



Фиг. 15.

дикуляромъ къ AB—отрѣзки, соотвѣтствующіе по величинѣ и по знаку (вверхъ положительные) синусамъ этихъ угловъ, такъ, напр., если отрѣзокъ OC будетъ изображать уголъ въ 45°, т.-е. будетъ равенъ $\frac{\pi}{4}$ какихъ-нибудь единицъ, то перпендикуляръ CD будетъ изображать $\sin 45^\circ$, будетъ равенъ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (см. § 3 и § 8 а) тѣхъ же единицъ. Соединивъ концы этихъ перпендикуляровъ, получимъ кривую синусоиду, которая показываетъ измѣненія синуса:

съ увеличеніемъ угла отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ синусъ растетъ отъ 0 до 1

„ „ „ „ $\frac{\pi}{2}$ по π „ уменьшается „ 1 до 0

„ „ „ „ π до $\frac{3}{2}\pi$ „ „ „ 0 до —1

„ „ „ „ $\frac{3}{2}\pi$ до 2π „ растетъ „ —1 до 0.

При дальнѣйшемъ увеличеніи угла отъ 2π до 4π, отъ 4π до 6π,... синусъ будетъ принимать послѣдовательно тѣ же значенія, т.-е. синусъ есть функція періодическая съ періодомъ $2\pi = 360^\circ$. Подобнымъ образомъ можно построить кривыя, изображающія ходъ измѣненія другихъ тригонометрическихъ функцій.

§ 27. Примѣръ. Замѣнить тригонометрическія величины угла въ 3594° тригонометрическими величинами угла меньшаго 45°.

По § 20, $\sin 3594^\circ = \sin (360^\circ . 9 + 354^\circ) = \sin 354^\circ$, по § 23 $\sin 354^\circ = \sin (360^\circ - 6^\circ) = -\sin 6^\circ$, слѣд , $\sin 3594^\circ = -\sin 6^\circ$.

По § 20 и § 22, $\operatorname{tg} 3594^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ . 19 + 174^\circ) = \operatorname{tg} 174^\circ$, по § 23, $\operatorname{tg} 174^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 6^\circ) = -\operatorname{tg} 6^\circ$, слѣд., $\operatorname{tg} 3594^\circ = -\operatorname{tg} 6^\circ$.

При замѣнѣ функцій какого-нибудь угла функціями остраго угла можно было бы всегда пользоваться §§ 19, 20, 21 и 22 слѣдующимъ образомъ:

1) вычесть 360° столько разъ, сколько возможно; функція при этомъ знака не мѣняетъ (§ 20);

2) вычесть 180°; *тангенсъ* (слѣд., и котангенсъ) знака не мѣняетъ (§ 22,;

3) наконецъ, взять дополненіе до 180°; *синусъ* (слѣд., и косекансъ) знака не мѣняетъ (§ 21);

4) Если уголъ отрицательный, то измѣнить его знакъ (§ 19).

Примѣры. 1) $\cos 3594° = \cos (360° \,.\, 9 + 354°) = \cos 354°$

$\cos 354° = \cos (354° - 180°) = -\cos 174°$

$-\cos 174° = -\cos (180° - 6°) = \cos 6°$, слѣд.,

$\cos 3594° = \cos 6°$,

2) $\operatorname{tg} 2080° = \operatorname{tg} (360° \,.\, 5 + 280°) = \operatorname{tg} 280°$

$\operatorname{tg} 280° = \operatorname{tg} (280° - 180°) = \operatorname{tg} 100°$

$\operatorname{tg} 100° = \operatorname{tg} (180° - 80°) = -\operatorname{tg} 80°$

$-\operatorname{tg} 80° = -\operatorname{ctg} 10°$, слѣд.,

$\operatorname{tg} 2080° = -\operatorname{ctg} 10°$.

Круговыя функціи.

§ 28. Если надо по данному синусу p или тангенсу q и т. д. найти уголъ, то это выражаютъ знакоположеніями: $x = \arcsin p$ или $x = \operatorname{arc\,tg} q$. Знакъ arc, сокращеніе латинскаго слова arcus (дуга), употребляется здѣсь по той причинѣ, что уголъ и его дуга выражаются однимъ и тѣмъ числомъ (§ 3).

Функціи $\arcsin p$, $\operatorname{arc\,tg} q$ и т. п. наз. *круговыми функціями* или *обратными тригонометрическимъ*, а тригонометрическія функціи наз. прямыми. Если имѣемъ функцію $y = \sin x$, то этой прямой функціи икса соотвѣтствуетъ обратная функція игрека $x = \arcsin y$.

Примѣръ. Мы знаемъ, что $\sin 30° = 1/2$, $\operatorname{tg} 45° = 1$, поэтому можемъ сказать, что

$$30° = \arcsin 1/2 \quad , \quad 45° = \operatorname{arc\,tg} 1$$

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin 1/2 \quad , \quad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1.$$

§ 29. Углы, одноименныя тригонометрическія функціи которыхъ равны по величинѣ и по знаку.

Если данъ уголъ, и мы опредѣляемъ тригонометрическія функціи его, то вопросъ допускаетъ одно рѣшеніе (§ 6); если же мы опредѣляемъ уголъ, зная какую-нибудь изъ его тригонометрическихъ функцій, напр синусъ, то вопросъ, какъ видно изъ § 20, допускаетъ безчисленное множество рѣшеній.

Найдемъ всѣ углы, имѣющіе одинъ и тотъ синусъ. Положимъ, что x—меньшій изъ угловъ, имѣющій данный синусъ; тотъ же синусъ имѣетъ уголъ $\pi - x$ (§ 21), а, по § 20, углы

$$2k\pi+x \text{ и } 2k\pi+\pi-x=(2k+1)\pi-x.$$

Эти двѣ формулы можно соединить въ одну

$$n\pi+x(-1)^n,$$

гдѣ n—положительное или отрицательное число. Эта формула даетъ углы $2k\pi+x$, когда n—четное ($=2k$), и углы $(2k+1)\pi-x$, когда n—нечетное ($=2k+1$).

Углы, имѣющіе одинъ и тотъ же косекансъ, выражаются тою же формулою, такъ какъ рав. (5) § 8 показываетъ, что косекансы одинаковы только у угловъ, имѣющихъ одинаковые синусы.

Также точно, пользуясь формулами приведенія, найдемъ выраженія для угловъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же тангенсъ и котангенсъ или одинъ и тотъ же косинусъ и секансъ.

Итакъ, углы, имѣющіе одинъ и тотъ же

синусъ и косекансъ, выражаются формулою $n\pi+x(-1)^n$

тангенсъ и **котангенсъ**, выражаются формулою $n\pi+x$,

косинусъ и **секансъ** „ „ $2n\pi\pm x$,

Примѣръ. Найти углы, синусъ которыхъ$=\frac{1}{2}$, зная, что $\sin 30°=\frac{1}{2}$.

Полагая въ формулѣ $n\pi+x(-1)^n$ $x=30°$, а $n=1, 2, 3, \ldots$ и $-1, -2, -3, \ldots$, найдемъ углы $150°, 390°, 510°, \ldots$ и $-210°, -330°, -570°, \ldots$

§ 30. Сказанное въ предыдущемъ параграфѣ позволяетъ получить слѣдующіе выводы.

I. Вообразимъ два угла, имѣющіе такой же синусъ, какъ у угла x. Эти углы пишемъ формулами

$$n\pi+x(-1)^n$$

$$\text{и} \qquad k\pi+x(-1)^k,$$

гдѣ n и k могутъ быть и четными и нечетными числами.

Возьмемъ два угла A и B, и допустимъ, что для нихъ n и k одновременно четныя числа (или нечетныя). Получимъ

$$A-B=n\pi-k\pi=(n-k)\pi,$$

гдѣ $n-k$ число четное. Обозначая это четное число чрезъ $2a$ имѣемъ

$$A-B=2a\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Если же допустить, что одно изъ чиселъ n и k четное, а другое нечетное, то будемъ имѣть

$$A+B=(n+k)\pi,$$

гдѣ $n+k$—нечетное число. Обозначая это нечетное число чрезъ $2b+1$, имѣемъ

$$A+B=(2b+1)\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Итакъ, *углы имѣютъ одинъ и тотъ же синусъ (косекансъ), если ихъ* **сумма** *есть* **нечетное** *кратное* π *или* **разность** *есть* **четное** *кратное* π.

II. Вообразимъ два угла A и B, имѣющіе такой же тангенсъ, какъ у угла x. Ихъ можно изобразить формулами

$$A=n\pi+x$$
$$B=k\pi+x\ ,$$

гдѣ n и k могутъ быть четными и нечетными.

Вычитая почленно, имѣемъ

$$A-B=(n-k)\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Итакъ, *углы имѣютъ одинъ и тотъ же тангенсъ (котангенсъ), если ихъ* **разность** *есть* **кратное** π.

III. Вообразимъ два угла A и B, имѣющіе такой же косинусъ, какъ у угла x. Эти углы можно изобразить формулами

$$A=2n\pi\pm x$$
и
$$B=2k\pi\pm x$$

Если взять одновременно верхніе или нижніе знаки при x, то

$$A-B=2(n-k)\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Если въ одной формулѣ взять верхній знакъ при x, а въ другой нижній, то

$$A+B=2(n+k)\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Итакъ, *углы имѣютъ одинъ и тотъ же косинусъ (секансъ), если* **сумма** *или* **разность** *ихъ есть* **четное** *кратное* π.

Примѣры.

I. $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = \sin 510^\circ = \ldots$
$\sin 30^\circ = \sin(-210^\circ) = \sin(-570^\circ) = \ldots$
$\sin 30^\circ = \sin 390^\circ = \sin 750^\circ = \ldots$
$\sin 30^\circ = \sin(-330^\circ) = \sin(-690^\circ) = \ldots$

II. $\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg} 390^\circ = \ldots$
$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg}(-150^\circ) = \operatorname{tg}(-330^\circ) = \ldots$

III. $\cos 30^\circ = \cos 390^\circ = \cos 750^\circ = \ldots$
$\cos 30^\circ = \cos 330^\circ = \cos 690^\circ = \ldots$
$\cos 30^\circ = \cos(-330^\circ) = \cos(-690^\circ) = \ldots$
$\cos 30^\circ = \cos(-390^\circ) = \cos(-750^\circ) = \ldots$

§ 31. Углы, одноименныя тригонометрическія функціи которыхъ равны по величинѣ, но различны по знаку.

I. Вообразимъ два такіе угла, напр., x и $-x$, синусы которыхъ равны, но различны по знаку. Углы имѣющіе синусы такіе же по величинѣ и по знаку, какъ у угла x, выражаются (§ 29) формулою

$$k\pi + x(-1)^k,$$

а углы, имѣющіе синусы такіе же по величинѣ и по знаку, какъ у угла $-x$, выражаются (§ 29) формулою

$$h\pi + (-x)(-1)^h,$$

слѣд., углы, синусы которыхъ отличаются только знакомъ, выражаются формулами

$$k\pi + x(-1)^k \text{ и } h\pi - x(-1)^h.$$

Складывая и вычитая эти формулы, имѣемъ

$$(k+h)\,\pi + x\,[(-1)^k - (-1)^h] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$(k-h)\,\pi + x\,[(-1)^k + (-1)^h] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Если числа k и h одновременно четныя или нечетныя, то формула (1) обращается въ $(k+h)\,\pi$, гдѣ $k+h$ есть число четное, а если одно изъ чиселъ h и k четное, а другое нечетное, то формула (2) обращается въ $(k-h)\pi$, гдѣ $k-h$ есть число нечетное.

Итакъ, *углы имѣютъ синусы, равные по величинѣ, но разные по знаку тогда, когда* **сумма** *этихъ угловъ есть* **четное** *кратное* π, *или тогда, когда* **разность** *ихъ есть* **нечетное** *кратное* π.

II. Вообразимъ два угла x и $-x$, тангенсы которыхъ равны, но различны по знаку; разсужденіями, подобными предыдущимъ, найдемъ, что углы, тангенсы которыхъ равны, но отличаются знаками, имѣютъ видъ

$$k\pi + x \text{ и } h\pi - x;$$

складывая эти выраженія получимъ $(k+h)\pi$, гдѣ $k+h$ можетъ быть четнымъ и нечетнымъ.

Итакъ, *углы имѣютъ тангенсы одинаковые по величинѣ, но разные по знаку тогда, когда ихъ* **сумма** *есть* **кратное** π.

III. Вообразимъ углы x и $\pi - x$, косинусы которыхъ равны, но различны по знаку (§ 21); углы косинусы которыхъ равны по величинѣ и по знаку косинусу угла x, выражаются формулою (§ 29)

$$2k\pi \pm x,$$

а углы, косинусы которыхъ равны по величинѣ и по знаку косинусу угла $\pi - x$, выражаются (§ 29) формулою

$$2h\pi \pm (\pi - x)\ ,\ \text{т. е.}\ (2h \pm 1)\pi \pm x,$$

слѣд., углы, косинусы которыхъ равны, но отличаются знаками, имѣютъ видъ

$$2k\pi \pm x \quad \text{и} \quad (2h \pm 1)\,\pi \pm x.$$

Складывая и вычитая эти формулы, получимъ

$$(2k + 2h \pm 1)\pi \quad \text{и} \quad (2k - 2h \pm 1)\pi;$$

Итакъ, *углы имѣютъ косинусы одинаковые по величинѣ, но разные по знаку тогда, когда ихъ* **сумма** *или* **разность** *есть* **нечетное** *кратное* π.

§ 32. Многозначность круговыхъ функцій.

Въ § 6 было сказано, что данный уголъ имѣетъ одинъ только синусъ. Въ § 29 сказано, что данный синусъ можетъ принадлежать безчисленному множеству угловъ какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ. Тоже самое можно сказать и о всякой другой тригонометрической функціи: данному углу соотвѣтствуетъ одинъ косинусъ, но данному косинусу соотвѣтствуетъ безчисленное множество положительныхъ и отрицательныхъ угловъ и т. д.

Сказанное выражаютъ обыкновенно такъ: тригонометрическія функціи суть функціи *однозначныя*, а круговыя функціи суть функціи *многозначныя*. При нѣкоторыхъ условіяхъ круговая функція можетъ оказаться однозначною. Возьмемъ примѣръ. Пусть дана функція $x = \arcsin y$. Если аргументу, т. е. игреку давать значенія не всѣ возможныя, а только промежуточныя между -1 и $+1$, то всякому значенію игрека въ этомъ промежуткѣ отвѣчаетъ только одно вполнѣ опредѣленное значеніе угла иксъ промежуточное между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, т. е. круговая функція $\arcsin y$ однозначна въ промежуткѣ между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Въ этомъ промежуткѣ заключается наименьшее значеніе функціи $\arcsin y$.

Задачи. 1. Найти тригонометрическія функціи угла $-x$, если $\sin x = {}^3/_5$.

2. Найти $\cos(-x)$ и $\operatorname{ctg}(-x)$, если $\operatorname{tg}x=0{,}75$.
3. Найти $\operatorname{tg}x$ и $\sin x$, если $\operatorname{sc}(-x)=2{,}5$.
4. Найти $\sin x$ и $\cos x$, если $\operatorname{tg}(-x)=-0{,}8$.
5. Найти косинусъ тупого угла, синусъ котораго равенъ 0,28.
6. Найти тангенсъ тупого угла, косекансъ котораго равенъ $1^2/_3$.

Показать, что

7. $\sin(\alpha-90^\circ)=-\cos\alpha$,
8. $\cos(\alpha-90^\circ)=\sin\alpha$.
9. $\operatorname{tg}(\alpha-90)^\circ=-\operatorname{ctg}\alpha$.
10. $\sin(45^\circ+x)=\cos(x-45^\circ)$.
11. $\cos(\alpha-180^\circ)=-\cos\alpha$,
12. $\operatorname{ctg}(x-180^\circ)=\operatorname{ctg}x$.

Привести къ тригонометрическимъ величинамъ остраго угла

13. $\sin 400^\circ$.
14. $\operatorname{tg} 2^1/_2\pi$.
15. $\cos 760^\circ$.
16. $\operatorname{ctg} 1100^\circ$.
17. $\cos 1148^\circ$.
18. $\sin 3{,}5\pi$.
19. $\operatorname{tg} 750^\circ 20'$.
20. $\sin 140^\circ$.
21. $\cos 115^\circ$.
22. $\operatorname{tg} {}^3/_4\pi$.
23. $\operatorname{ctg} {}^5/_9\pi$.
24. $\operatorname{sc} 162^\circ$.
25. $\operatorname{tg} 128^\circ$.
26. $\sin 138^\circ 40'$.
27. $\cos 220^\circ$.
28. $\operatorname{tg} 1{,}3\pi$.
29. $\sin 1{,}3\pi$.
30. $\operatorname{tg} 187^\circ$.
31. $\operatorname{sc} 260^\circ$.
32. $\operatorname{tg} 298^\circ$.
33. $\cos 330^\circ$.
34. $\cos 1{,}75\pi$.
35. $\sin 280^\circ$.
36. $\operatorname{ctg} 345^\circ$.
37. $\operatorname{sc} 358^\circ$.
38. $\sin 2546^\circ$.
39. $\operatorname{tg} 1894^\circ$.
40. $\sin 1000^\circ$.

Привести къ тригонометрическимъ функціямъ угла меньшаго 45°

41. $\sin 142^\circ$.
42. $\operatorname{tg} 236^\circ$.
43. $\operatorname{ctg} 110^\circ$.
44. $\sin 260^\circ$.
45. $\operatorname{tg} 290^\circ$.
46. $\operatorname{ctg} 1^1/_4\pi$.
47. $\sin 3{,}8\pi$.
48. $\sin 228^\circ$.
49. $\operatorname{sc} 1136^\circ$.
50. $\operatorname{tg} 95^\circ$.
51. $\cos 2260^\circ$.
52. $\operatorname{ctg} 276^\circ 20'$.
53. $\cos 327^\circ 14'$.
54. $\operatorname{tg} 280^\circ 14'$.
55. $\cos 930^\circ$.
56. $\sin 194^\circ$.
57. $\sin 125^\circ 20'$.
58. $\operatorname{tg} 397^\circ$.
59. $\sin 410^\circ$.
60. $\cos 602^\circ$.

Найти x, если

61. $\sin x=\sin 20^\circ$.
62. $\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$.
63. $\sin x=\cos 60^\circ$.
64. $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}42^\circ$.
65. $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}45^\circ=1$.
66. $\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}x$.
67. $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}50^\circ$.
68. $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}{}^1/_3\pi$.
69. $\cos x=\cos 25^\circ$.
70. $\cos ax=\cos a$.
71. $\cos x=\sin 40^\circ$.
72. $\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}{}^1/_4\pi$.
73. $\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}70^\circ$.
74. $\sin x=\sin 160^\circ$.
75. $\cos x=-\cos 24^\circ$.
76. $\operatorname{tg}2x=\operatorname{ctg}x$.
77. $\operatorname{tg}2x\,.\,\operatorname{tg}x=1$.
78. $\operatorname{tg}(ax+b)=\operatorname{ctg}(a_1x+b_1)$.
79. $\cos x=-\sin x$.
80. $\sin x=\operatorname{csc}x$.
81. Показать, что $x=\sin p-1$, если $\arcsin(x+1)=p$.

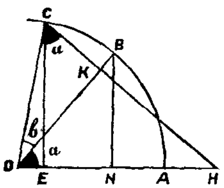
ГЛАВА III.

§ 33. Тригонометрическія функціи суммы и разности двухъ угловъ.

Задача заключается въ томъ, чтобы, зная тригонометрическія функціи двухъ угловъ, найти тригонометрическія функціи ихъ суммы и разности.

I. Синусъ суммы. Вообразимъ два такихъ острыхъ угла $AOB=a$ и $BOC=b$ (фиг. 16), что ихъ сумма $a+b<90^\circ$ и $a>b$. Опустимъ изъ C на OA перпендикуляръ $CE=\sin(a+b)$.

Для опредѣленія $\sin(a+b)$ сдѣлаемъ слѣдующее построеніе.



Фиг. 16.

На общую сторону OB угловъ a и b опустимъ изъ конца C дуги угла b перпендикуляръ CK и продолжимъ его до пересѣченія въ H съ радіусомъ OA. Изъ B опускаемъ на OA перпендикуляръ BN. Имѣемъ: $BN=\sin a$, $ON=\cos a$, $CK=\sin b$, $OK=\cos b$.

Прямоугольные $\triangle\triangle$ CEH и OBN подобны, такъ какъ $\angle ECH=\angle BON=a$ (по перпендикулярности сторонъ CE къ ON и CH къ OB), слѣд.,

$$\frac{CE}{CH}=\frac{ON}{OB} \quad \text{или} \quad \frac{\sin(a+b)}{KH+\sin b}=\frac{\cos a}{1},$$

откуда $$\sin(a+b)=\cos a\,(KH+\sin b) \qquad \text{(a)}$$

Остается найти KH. Для этого воспользуемся подобіемъ $\triangle\triangle$-овъ KHO и OBN ($\angle BON$—общій); имѣемъ

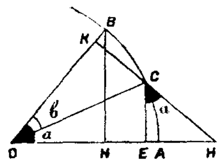
$$\frac{KH}{OK}=\frac{BN}{ON} \quad \text{или} \quad \frac{BH}{\cos b}=\frac{\sin a}{\cos a},$$

откуда $$KH=\frac{\sin a\,\cos b}{\cos a}.$$

Подставляя значеніе KH въ рав. (а), имѣемъ

$$\sin(a+b)=\sin a\,\cos b+\cos a\,\sin b \qquad (1)$$

II. Синусъ разности. Даны (фиг. 17) острые углы $\angle AOB=a$ и $\angle BOC=b$, причемъ $a>b$. Опустимъ изъ C на OA перпендикуляръ $CE=\sin(a-b)$.



Фиг. 17.

Для опредѣленія $\sin(a-b)$ сдѣлаемъ такое же построеніе, какъ и въ первомъ случаѣ, т. е на общую сторону OB угловъ a и b опустимъ изъ конца C дуги угла b перпендикуляръ CK и продолжимъ его до пересѣченія въ H съ радіусомъ OA. Изъ B опускаемъ на OA перпендикуляръ. Имѣемъ: $BN=\sin a$, $ON=\cos a$, $CK=\sin b$, $OK=\cos b$.

Прямоугольные $\triangle\triangle$ CEH и OBN подобны, такъ какъ $\angle ECH=\angle BON=a$ (по перпендикулярности сторонъ CE къ ON и CH къ OB), слѣд.,

$$\frac{CE}{CH}=\frac{ON}{OB} \quad \text{или} \quad \frac{\sin(a-b)}{KH-\sin b}=\frac{\cos a}{1},$$

откуда $\sin(a-b)=\cos a\,(KH-\sin b)$

Подставляя сюда найденное выраженіе для KH, получимъ

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

III. Косинусъ суммы. По § 7 имѣемъ

$$\cos(a+b)=\sin[90^\circ-(a+b)]=\sin(90^\circ-a-b),$$

отсюда, разсматривая $90^\circ-a-b$, какъ разность угловъ $90^\circ-a$ и b (при чемъ $90^\circ-a>b$), на основаніи рав. (2) имѣемъ

$$\cos(a+b)=\sin(90^\circ-a)\cos b-\cos(90^\circ-a)\sin b=$$
$$=\cos a\cos b-\sin a\sin b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

IV. Косинусъ разности. По § 7 имѣемъ

$$\cos(a-b)=\sin[90^\circ-(a-b)]=\sin(90^\circ-a+b),$$

а на основаніи рав. (1), видя въ $90^\circ-a+b$ сумму угловъ $90^\circ-a$ и b, получимъ

$$\cos(a-b)=\sin(90^\circ-a)\cos b+\cos(90^\circ-a)\sin b=$$
$$=\cos a\cos b+\sin a\sin b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

V. Тангенсъ суммы.

Имѣемъ $\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$, или, по рав. (1) и (3) § 31,

$$=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}.$$

Дѣля числителя и знаменателя этой дроби на $\cos a\cos b$, получимъ

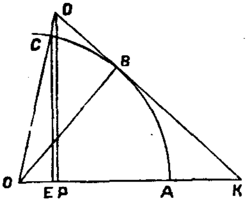
$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}} \quad \text{или} \quad =\frac{\dfrac{\sin a}{\cos a}+\dfrac{\sin b}{\cos b}}{1-\dfrac{\sin a}{\cos a}\cdot\dfrac{\sin b}{\cos b}}$$

или $$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

VI. Тангенсъ разности. Такъ же точно найдемъ, что

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

§ 33а. I. Синусъ суммы. Даны два такихъ угла $AOB=$ $=a$ и $BOC=b$, что $a+b<90$ и $a>b$ (фиг. 18). Изъ C опустимъ на OA перпендикуляръ $CE=\sin\,(a+b)$.



Фиг. 18.

Для опредѣленія $\sin\,(a+b)$ сдѣлаемъ слѣдующее построеніе. Чрезъ точку B, въ которой общая сторона угловъ a и b пересѣкаетъ дугу, проводимъ касательную къ дугѣ до пересѣченія къ K и D съ другими сторонами OA и OC угловъ. Изъ D опускаемъ на OK перпендикуляръ DP.

Легко видѣть, что

$$\triangle\ DOK=\tfrac{1}{2}\,DK\ .\ OB=\tfrac{1}{2}\,OK\ .\ DP,$$

откуда

$$DK\ .\ OB=OK\ .\ DP,$$

но $DK=DB+BK=\mathrm{tg}b+\mathrm{tg}a$, $OK=\mathrm{sc}a$ и $OB=1$, поэтому предыдущее равенство обращается въ

$$\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b=\mathrm{sc}a\ .\ DP\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (a)$$

Остается связать DP съ искомою величиною CE. Легко видѣть, что $\triangle\ DPO \sim \triangle\ CEO$ ($DP \parallel CE$), слѣд.,

$$\frac{DP}{CE}=\frac{DO}{CO},\ \text{откуда}\ DP=\frac{DO\ .\ CE}{CO},$$

но $DO=\mathrm{sc}b$ и $CO=1$,

поэтому $DP=\mathrm{sc}b\,\sin\,(a+b)$.

Подставляя это выраженіе DP въ уравненіе (a), получимъ

$$\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b=\mathrm{sc}a\ \mathrm{sc}b\ \sin\,(a+b),$$

откуда

$$\sin\,(a+b)=\frac{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b}{\mathrm{sc}a\ \mathrm{sc}b}$$

Остается преобразовать это выраженіе для $\sin(a+b)$. Подставляя $\frac{\sin a}{\cos a}$ вм. $\mathrm{tg}a$ и $\frac{\sin b}{\cos b}$ вм. $\mathrm{tg}b$ и упрощая, получимъ

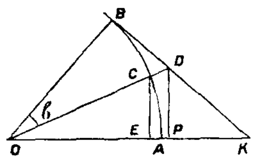
$$\sin\,(a+b)=\frac{\sin a\ \cos b+\cos a\ \sin b}{\cos a\ \mathrm{sc}a\ \cos b\ \mathrm{sc}b},$$

но, по рав. (3) § 8, $\cos a\ \mathrm{sc}a=1$ и $\cos b\ \mathrm{sc}b=1$, слѣд.,

$$\sin\,(a+b)=\sin a\ \cos b+\cos b+\cos a\ \sin b\ \ldots\ldots\ (1)$$

II. Синусъ разности. Даны (фиг. 19) $\angle AOB=a$ и $\angle BOC=$ $=b$, при чемъ $a>b$. Изъ C опустимъ перпендикуляръ $CE=\sin(a-b)$.

Для опредѣленія $\sin(a-b)$ сдѣлаемъ то же построеніе, что и въ первомъ случаѣ, т. е. чрезъ точку B, въ которой общая сторона угловъ a и b пересѣкаетъ дугу, проводимъ касательную къ дугѣ до пересѣченія въ K и D съ другими сторонами OA и OC угловъ. Изъ D опускаемъ на OK перпендикуляръ DP. Легко видѣть что



Фиг. 19.

$$\triangle DOK=\tfrac{1}{2}OK\,.\,DP=\tfrac{1}{2}DK\,.\,OB;$$

откуда $\qquad OK\,.\,DP=DK\,.\,OB,$

но $OK=\mathrm{sc}\,a$, $DK=BK-BD=\mathrm{tg}\,a-\mathrm{tg}\,b$ и $OB=1$,

поэтому $\qquad \mathrm{sc}\,a\,.\,DP=\mathrm{tg}\,a-\mathrm{tg}\,b \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (b)$

Остается связать DP съ искомою величиною CE. Легко видѣть, что $\triangle DPO \backsim \triangle CEO$ ($DP \parallel CE$), поэтому

$$\frac{DP}{CE}=\frac{DO}{CO}\text{, откуда } DP=\frac{DO\,.\,CE}{CO},$$

но $\qquad DO=\mathrm{sc}\,b$ и $CO=1$,

слѣд. $\qquad DP=\mathrm{sc}\,b\,\sin(a-b)$

Подставляя это выраженіе для DP въ уравненіе (b), получимъ

$$\mathrm{sc}\,a\;\mathrm{sc}\,b\;\sin(a-b)=\mathrm{tg}\,a-\mathrm{tg}\,b,$$

откуда $\qquad \sin(a-b)=\dfrac{\mathrm{tg}\,a-\mathrm{tg}\,b}{\mathrm{sc}\,a\;\mathrm{sc}\,b}$

или, по рав. 3 § 8, $\quad \sin(a-b)=\cos a\,\cos b\,(\mathrm{tg}\,a-\mathrm{tg}\,b)$

или, раскрывая скобки,

$$\sin(a-b)=\mathrm{tg}\,a\,\cos a\,\cos b-\cos a\,\cos b\,\mathrm{tg}\,b,$$

но $\qquad \mathrm{tg}\,a\,\cos a=\sin a$ и $\cos b\,\mathrm{tg}\,b=\sin b$, слѣд.,

$$\sin(a-b)=\sin a\,\cos b-\cos a\,\sin b \;\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

§ 34. Обобщеніе. Покажемъ, что равенства предыдущаго §-а справедливы для всѣхъ угловъ.

I. Положимъ, что даны $a<\frac{\pi}{2}$, $b<\frac{\pi}{2}$, но $a+b>\frac{\pi}{2}$.

По § 21 имѣемъ

$$\sin(a+b)=\sin[\pi-(a+b)] \text{ или}$$

$$=\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\right].$$

Такъ какъ $a+b>\frac{\pi}{2}$, то $[\pi-(a+b)]$ или

$\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+\left(\frac{\pi}{2}-b\right)<\frac{\pi}{2}$, слѣд., къ угламъ $\frac{\pi}{2}-a$ и $\frac{\pi}{2}-b$ можно примѣнить формулу § 33, поэтому

$$\sin(a+b)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$$

или, по § 7,

$$=\cos a\ \sin b+\sin a\ \cos b.$$

То же доказательство для остальныхъ формулъ. Итакъ, формулы § 33 справедливы для всѣхъ острыхъ угловъ.

II. Слѣдующая теорема даетъ возможность показать справедливость формулъ § 33 для всѣхъ угловъ.

Теорема. *Если формулы § 33 справедливы для какихъ-нибудь угловъ x и y, то онѣ будутъ справедливы и тогда, когда одинъ изъ угловъ увеличится на $\frac{\pi}{2}$.*

Положимъ, что x увеличился на $\frac{\pi}{2}$ и $x+\frac{\pi}{2}=k$; докажемъ, что формула (1) § 33 справедлива для угловъ k и y, т.-е. что

$$\sin(k+y)=\sin k\cos y+\cos k\sin y;$$

для этого замѣтимъ, что

$$\sin(k+y)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x+y\right), \text{ или}$$

по § 24,

$$=\cos(x+y),$$

а такъ какъ для угловъ x и y формулы § 31 справедливы, то имѣемъ

$$\cos(x+y)=\cos x\ \cos y-\sin x\sin y,$$

но, по § 24, $\cos x=\sin k$ и $\sin x=-\cos k$, слѣд.,

$$\sin(k+y)=\cos(x+y)=\sin k\cos y+\cos k\sin y.$$

Пользуясь только что доказанной теоремой, легко распространить формулы § 33 на какіе угодно углы A и B.

Раздѣливъ каждый изъ нихъ на $\frac{\pi}{2}$, получимъ

$$A=m\cdot\frac{\pi}{2}+p,\qquad B=n\cdot\frac{\pi}{2}+q,$$

гдѣ m и n—цѣлыя числа, а p и q—острые углы, для которыхъ формулы § 33 справедливы (§ 34, I); эти формулы на основаніи предыдущей теоремы справедливы для всѣхъ тѣхъ угловъ, которые мы будемъ получать, прибавляя постепенно къ p и q по $\frac{\pi}{2}$, т.-е. въ концѣ концовъ, и для угловъ A и B.

III. Формулы § 33 справедливы и тогда, когда $a<b$.
Въ самомъ дѣлѣ,

$$\sin(a-b) = -\sin(b-a) = -(\sin b\cos a - \cos b\sin a) =$$
$$= \sin a\cos b - \cos a\sin b.$$

То же доказательство для остальныхъ формулъ.

§ 35. Синусъ, косинусъ и тангенсъ двойного угла.

Полагая $a=b$ въ формулахъ (1), (3) и (5) § 33, получимъ

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} \quad \ldots\ldots (3)$$

Примѣчаніе. Если положить $b=2a$, $3a$, и т. д., то получимъ $\sin 3a$, $\cos 3a$ и т. д.

§ 36. Синусъ, косинусъ и тангенсъ половины угла.

По формулѣ (2) § 35 имѣемъ

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} \quad \ldots\ldots (1)$$

Подставляя $1-\cos^2\frac{a}{2}$ вм. $\sin^2\frac{a}{2}$, получимъ

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1, \text{ откуда}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \quad \ldots\ldots (2)$$

Подставляя $1-\sin^2\frac{a}{2}$ вм. $\cos^2\frac{a}{2}$ въ рав. (1), получимъ

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}, \text{ откуда}$$

$$\sin\frac{a}{2}{}^{*)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Дѣля рав. (3) на (2), получимъ

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Умножая числителя и знаменателя подкоренной дроби на ея числителя, получимъ

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos a)^2}{1-\cos^2 a}} \text{ или } = \frac{1-\cos a}{\sin a} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

умножая же на ея знаменателя, получимъ

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Равенства (5) и (6) можно получить слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin{}^1/_2 a}{\cos{}^1/_2 a}$, то, умножая члены дроби или на $2\sin{}^1/_2 a$ или на $2\cos{}^1/_2 a$ и принимая во вниманіе равенства (3) и (2), имѣемъ

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin{}^1/_2 a}{\cos{}^1/_2 a} \text{ или } = \frac{2\sin^2{}^1/_2 a}{2\cos{}^1/_2 a\,\sin{}^1/_2 a} = \frac{1-\cos a}{\sin a}$$

$$\text{и } \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin{}^1/_2 a}{\cos{}^1/_2 a} \text{ или } = \frac{2\sin{}^1/_2 a\,\cos{}^1/_2 a}{2\cos^2{}^1/_2 a} = \frac{\sin a}{1+\cos a}$$

Примѣчаніе. Покажемъ, что двойной знакъ передъ радикаломъ въ формулахъ (2), (3) и (4) не есть только результатъ алгебраическаго рѣшенія вопроса, а согласуется съ тригонометрическою сущностью его.

Дадимъ объясненіе аналитическое.

1) Въ вычисленіе входитъ не самый уголъ a, а только $\cos a$, поэтому наши формулы (2), (3) и (4) должны быть справедливы для всѣхъ угловъ, имѣющихъ тотъ же $\cos a$.

Всѣ углы a, имѣющіе тотъ же косинусъ, выражаются формулами (§ 29)

$$2k\pi + \alpha \quad \text{и} \quad 2k\pi - \alpha,$$

*) Если a—уголъ треугольника, то онъ меньше 180°, а потому $\frac{a}{2} < 90°$; въ такомъ случаѣ въ формулахъ (2), (3) и (4) надо брать, конечно, только знакъ $+$ (§ 15).

слѣд., углы $^1/_2 a$ выражаются формулами

$$k\pi + \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad k\pi - \frac{\alpha}{2},$$

но тангенсы угловъ первой формы равны тангенсамъ угловъ второй формы (§ 31, II) только по абсолютной величинѣ, а отличаются знаками. Вотъ почему въ формулѣ (4) взятъ двойной знакъ.

Въ формулахъ (5) и (6) даны $\sin a$ и $\cos a$. Всѣ углы, имѣющіе тѣ же синусъ и косинусъ, какъ и уголъ a, выражаются (§ 29) формулою $2k\pi + \alpha$, слѣд., углы $^1/_2 a$ выражаются формулою $k\pi + \frac{\alpha}{2}$, а у всѣхъ подобныхъ угловъ тангенсъ одинъ и тотъ же (§ 30, II). Вотъ почему въ формулахъ (5) и (6) двойного знака нѣтъ.

Двойной знакъ въ форм. (2) и (3) взятъ потому, что синусы и косинусы угловъ указанныхъ формъ отличаются знаками; косинусы отличаются знаками тогда, когда въ одной изъ этихъ формъ k четное, а въ другой нечетное, напр., у угловъ $\frac{\alpha}{2}$ и $\pi - \frac{\alpha}{2}$, потому что сумма ихъ въ такомъ случаѣ равна нечетному числу разъ π (§ 31, III); синусы угловъ этихъ формъ отличаются знаками тогда, когда въ нихъ k одновременно четное или нечетное (§ 31, I).

2) Въ формулахъ (2), (3) и (4) данъ не самый уголъ a, а только $\cos a$. Эти формулы показываютъ, что одному значенію $\cos a$ соотвѣтствуетъ два значенія $\sin\frac{\alpha}{2}$ и два значенія $\cos\frac{\alpha}{2}$. Объясняется это слѣдующимъ образомъ. Существуетъ цѣлая группа (§ 29) угловъ, а не одинъ только уголъ a, имѣющихъ тотъ же $\cos a$; всѣ эти углы выражаются формулою $a = 2k\pi \pm \alpha$, гдѣ k—цѣлое число. Поэтому синусы и косинусы половинъ этихъ угловъ выражаются формулами

$$\sin\frac{1}{2}(2k\pi \pm \alpha) \quad \text{и} \quad \cos\frac{1}{2}(2k\pi \pm \alpha).$$

Разсмотримъ каждую изъ этихъ формулъ отдѣльно.

Имѣемъ

$$\sin\frac{a}{2} = \sin\frac{1}{2}(2k\pi \pm \alpha) = \sin\left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin k\pi \cos\frac{\alpha}{2} \pm \cos k\pi \sin\frac{\alpha}{2} = \pm \sin\frac{\alpha}{2}$$

такъ какъ $\sin k\pi = 0$ и $\cos k\pi = \pm 1$.

Такъ же точно

$$\cos\frac{a}{2}=\cos\frac{1}{2}(2\kappa\pi\pm\alpha)=\cos\left(\kappa\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=\cos\kappa\pi\,\mathrm{cs}\frac{\alpha}{2}\mp\sin\kappa\pi\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому и $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Итакъ, зная только *cosa*, мы не можемъ утверждать, какой изъ двухъ знаковъ надо взять при радикалѣ въ формулахъ (2), (3) и (4). Если же будетъ извѣстенъ самый уголъ a, то мы будемъ знать, какой четверти принадлежитъ $\frac{a}{2}$, а потому будемъ знать, положительный ли $\sin\frac{a}{2}$ и $\cos\frac{a}{2}$, т. е. будемъ знать, какой брать знакъ при радикалѣ.

Что касается равенствъ (5) и (6), то въ нихъ вторая часть взята со знакомъ $+$, п. что, какъ сейчасъ увидимъ, обѣ части этихъ равенствъ равны не только по величинѣ, но и по знаку. Въ самомъ дѣлѣ, числитель правой части рав. (5), т. е. $1-\cos a$ всегда положительный, такъ какъ $\cos a<1$, слѣд., знакъ правой части зависитъ только отъ знака знаменателя $\sin a$, а потому намъ остается доказать, что знаки $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ и $\sin a$ одинаковы, а это видно вотъ изъ чего: $\sin a=2\sin\frac{a}{2}\,\mathrm{cs}\frac{a}{2}$, а $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$, т е. $\sin a$ есть удвоенное произведеніе двухъ чиселъ $\sin\frac{a}{2}$ и $\cos\frac{a}{2}$, а $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ есть частное тѣхъ же чиселъ, а мы знаемъ что знакъ произведенія и частнаго двухъ чиселъ одинъ и тотъ же. Итакъ знаки $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ и $\sin a$ одинаковы, а потому и знаки обѣихъ частей равенства (5) одинаковы. Такъ же точно можно показать, что знаки обѣихъ частей равенства (6) одинаковы.

§ 37. Сумма синусовъ и косинусовъ двухъ угловъ.

Складывая попарно и вычитая равенства (1) и (2), (3) и (4) § 33, получимъ

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b,$$
$$\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a \cos b,$$
$$\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin a \sin b,$$

Полагая $a+b=p$ и $a-b=q$, найдемъ

$$a=\frac{p+q}{2} \text{ и } b=\frac{p-q}{2};$$

подставляя эти значенія a и b въ предыдущія равенства, получимъ

$$\sin p+\sin q = 2\sin {}^1/_2(p+q)\cos {}^1/_2(p-q) \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\sin p-\sin q = 2\sin {}^1/_2(p-q)\cos {}^1/_2(p+q) \quad . \quad . \quad (2)$$
$$\cos p+\cos q = 2\cos {}^1/_2(p+q)\cos {}^1/_2(p-q) \quad . \quad . \quad (3)$$
$$\cos p-\cos q = -2\sin {}^1/_2(p-q)\sin {}^1/_2(p+q) \quad . \quad . \quad (4)$$

Формулы (1), (2), (3) и (4) читаемъ такъ:

Сумма синусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію синуса *полусуммы* на косинусъ полуразности тѣхъ же угловъ.

Разность синусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію синуса *полуразности* на косинусъ полусуммы тѣхъ же угловъ.

Сумма косинусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію косинуса *полусуммы* на косинусъ полуразности тѣхъ же угловъ.

Разность косинусовъ двухъ угловъ равна съ обратнымъ знакомъ удвоенному произведенію синуса *полуразности* на синусъ полусуммы тѣхъ же угловъ.

§ 38. При рѣшеніи $\triangle$-овъ намъ понадобится такое слѣдствіе изъ равенствъ § 37: **сумма синусовъ двухъ угловъ такъ относится къ ихъ разности, какъ тангенсъ полусуммы тѣхъ же угловъ относится къ тангенсу ихъ полуразности.**

Дѣля почленно рав. (1) на (2), получимъ

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{\sin {}^1/_2(p+q)}{\cos {}^1/_2(p+q)}\cdot\frac{\cos {}^1/_2(p-q)}{\sin {}^1/_2(p-q)},$$ или, въ силу

рав. (2) и (4) § 8, $= \operatorname{tg} {}^1/_2(p+q)\operatorname{ctg} {}^1/_2(p-q)$, или въ силу

рав. (6) § 8, $= \operatorname{tg} {}^1/_2(p+q)\frac{1}{\operatorname{tg} {}^1/_2(p-q)}=\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2(p+q)}{\operatorname{tg} {}^1/_2(p-q)}$.

Задачи. Полагая $\sin a = {}^1/_2$, $\sin b = {}^1/_3$, найти

1. $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\operatorname{tg}(a+b)$.

2. $\sin 2a$, $\operatorname{tg} 2a$, $\operatorname{ctg} 2a$, $\cos 2a$, $\cos {}^1/_2 a$, $\operatorname{tg} {}^1/_2 a$, $\cos {}^1/_2 (a-b)$.

3. Полагая $\operatorname{tg} a = 1^1/_2$, найти $\operatorname{tg} 2a$, $\operatorname{tg} {}^1/_2 a$, $\sin {}^1/_2 a$, $\sin 2a$.

4. Найти $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{ctg} a$, если $\operatorname{tg} 2a = -1{,}5$.

5. Полагая $\operatorname{ctg} {}^1/_4 a = {}^3/_4$, найти $\cos {}^1/_2 a$ и $\operatorname{tg} {}^1/_8 a$.

6. Выразить $\operatorname{tg} {}^1/_2 a$ черезъ $\sin a$.

7. $\csc 2x = 1^2/_3$, найти $\operatorname{ctg} x$. **7a.** $\operatorname{tg} a = {}^3/_7$; найти $\sin 2a$.

8. Повѣрить (см. § 34) формулы (2), (3) и (4) § 33 для острыхъ угловъ.

9. Полагая $\sin a = 0{,}5$, $\sin b = {}^1/_3$, $\sin c = 1$, найти $\sin(a+b+c)$ и $\cos(a-b+c)$.

10. Найти $\operatorname{tg}(a+b+c)$ и $\operatorname{tg}(a+b-c)$, полагая $\operatorname{tg} a = 1^1/_2$, $\operatorname{tg} b = {}^1/_2$ и $\operatorname{tg} c = {}^2/_3$.

11. Выразить $\operatorname{ctg}(a \pm b)$ чрезъ $\operatorname{ctg} a$ и $\operatorname{ctg} b$.

12. Выразить, какъ въ § 36, $\operatorname{ctg} {}^1/_2 a$ чрезъ $\sin a$ и $\cos a$.

13. Выразить $\operatorname{ctg} 2a$ чрезъ $\operatorname{ctg} a$.

14. Выразить $\operatorname{tg} 3a$ чрезъ $\operatorname{tg} a$.

Найти тригонометрическія величины угловъ

15. $22°30'$ и $11°15'$ зная, что $\sin 45° = {}^1/_2\sqrt{2}$.

16. $60°$, $15°$ и $7°30'$, зная что $\sin 30° = {}^1/_2$.

17. $36°$ и $72°$, зная, что $\sin 18° = {}^1/_4(\sqrt{5}-1)$.

18. Зная тригонометрическія величины угловъ $45°$, $30°$, $18°$ и $72°$, найти триг. величины угловъ въ $75°$, $48°$, $12°$, $63°$, $27°$ и $9°$.

19. Показать, что $\operatorname{tg} 52°30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$; $67°30' = 1 + \sqrt{2}$; $\sin 52°30' + \sin 7°30' = {}^1/_2\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 15° = 2 + \sqrt{3}$.

Показать, что

20. $\operatorname{tg}(45°+a) = \dfrac{1+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg} a}$. **21*.** $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$.

22*. $\operatorname{tg}(45°+a) - \operatorname{tg}(45°-a) = \operatorname{tg} 2a$.

22a. $\sin(a+45°)\sin(a-45°) = -{}^1/_2 \cos 2a$.

23. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a = \sin^2 a - \sin^2 b$.

24*. $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$.

25. $\sin(30°+a) + \sin(30°-a) = \cos a$.

26.* $\cos({}^1/_6\pi - a) - \cos({}^1/_6\pi + a) = \sin a$.

27. $\sin(60°+a) - \sin(60°-a) = \sin a$.

28. $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(45°-x)$. **29.*** $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x - 1} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(45°+x)$

30. $\dfrac{\sin 2a}{\cos^2 a} = 2\operatorname{tg} a$. **31.** $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$.

32.* $(\cos a - \sin a)^2 = 1 - \sin 2a$. **33.** $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 a}{2\operatorname{tg} a} = \operatorname{ctg} 2a$.

34. $\operatorname{ctg} 2a - \operatorname{tg} a = 2\operatorname{ctg} 2a$. **35.** $(1+\operatorname{tg} x)(\operatorname{ctg} x - 1) = 2\operatorname{ctg} 2x$.

36. $\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a = 2\csc 2a$. **37** $\csc 2a = {}^1/_2 \sec a \csc a$.

38. $\cos 2x \sec^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x$. **39.*** $\operatorname{ctg}^2 x - 1 = \cos 2x \csc^2 x$.

40. $2\sin^2(45^\circ-{}^1/_2x)=1-\sin x$.

41.* $2\cos^2(45^\circ+{}^1/_2x)=1-\sin x$.

42.* $2\cos^2(45^\circ-{}^1/_2x)=1+\sin x$.

43. $\mathrm{tg}\,(45^\circ+{}^1/_2x)=(1+\sin x)\,\mathrm{sc}\,x$.

44. $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\mathrm{ctg}^2\dfrac{x}{2}$.

45. $\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}=\dfrac{3\,\mathrm{tg}^2a-1}{3-\mathrm{tg}^2a}$.

46. $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2a}{1+\mathrm{tg}^2a}=\cos 2x$.

47. $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,a}{1+\mathrm{tg}^2a}=\sin 2a$.

48. $\dfrac{\sin 2a}{1+\cos 2a}=\mathrm{tg}\,a$.

49. $\mathrm{ctg}\,x\;\mathrm{tg}\,{}^1/_2\,x=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$.

50. $\sin a+\cos a=\sin 2a\,(\sin a+\cos a)-\cos 2a\,(\sin a-\cos a)$.

51. $\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}=\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}$.

51a. $\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{tg}\,x=2\,\mathrm{ctg}\,2x$.

52. $(1-\cos x)\cos^2\dfrac{x}{2}=(1+\cos x)\sin^2\dfrac{x}{2}$.

53. $\sin(a+b\;\sin(b-a)+\sin(b+c)\sin(c-b)+\sin(a+c)\sin(a-c)=0$.

54. $\sin^2(a+b)=\cos^2a+\cos^2b-2\cos a\cos b\cos(a+b)=\sin^2a+$
$+\sin^2b+2\sin a\sin b\cos(a+b)$.

55.* $\cos^2(a+b)=\sin^2a-\cos^2b-2\cos a\cos b\cos(a-b)$.

56.* $\cos^2(a-b)-\cos^2(a+b)=\sin 2a\sin 2b$.

57. $\mathrm{arc\,sin}\,{}^3/_5+\mathrm{arc\,sin}\,{}^4/_5=90^\circ$.

58.* $\mathrm{arc\,tg}\,{}^1/_7+2\,\mathrm{arc\,tg}\,{}^1/_3=\dfrac{\pi}{4}$.

59.* $\mathrm{arc\,tg}\,{}^1/_2+\mathrm{arc\,tg}\,{}^1/_3=\dfrac{\pi}{4}$.

59a. $\mathrm{arc\,ctg}\,{}^3/_{11}+\mathrm{arc\,ctg}\,{}^4/_7=\dfrac{\pi}{4}$.

60*. $\mathrm{arc\,cos}\,{}^4/_5=\mathrm{arc\,sin}\,{}^{77}/_{85}-\mathrm{arc\,sin}\,{}^8/_{17}$.

61. $\mathrm{arc\,tg}\,{}^8/_{15}=3\,\mathrm{arc\,tg}\,{}^1/_4$.

62*. $\mathrm{arc\,ctg}\,{}^3/_4=2\,\mathrm{arc\,tg}\,{}^1/_2$.

Найти

63. $\sin(\mathrm{arc\,sin}\,{}^3/_5+\mathrm{arc\,cos}\,{}^5/_{13})$.

64.* $\cos(\mathrm{arc\,sin}\,0{,}8-\mathrm{arc\,tg}\,2{,}4)$.

Рѣшить уравненія

65. $\mathrm{tg}\,2x=3\,\mathrm{tg}\,x$.

66*. $\mathrm{tg}\,2x=\mathrm{ctg}\,x$.

67*. $\mathrm{tg}\,x\;\mathrm{ctg}(90^\circ-2x)=1{}^1/_8$.

68. $\mathrm{tg}\,(x+a)=-3\,\mathrm{tg}\,x$.

69*. $\mathrm{tg}(a+x)-\mathrm{tg}\,x=m$.

70. $3\sin x=2\sin(a-x)$.

71*. $\sin x+\sin(60^\circ-x)=m$.

72*. $\sin x=2\sin(30^\circ-x)$.

73*. $\sin(x+a)=\cos x$.

74. $\sin x=2\cos 2x$.

75*. $\cos x+\cos 2x=0{,}68$.

76. $\cos x+\cos{}^1/_2x=1$.

77*. $\cos{}^1/_2x+2\cos x=a$.

78. $\cos x=3\cos 2x$.

79. $\sin 2x=4\sin x$.

80. $\sin^2x+\sin^2 2x=1{,}32$.

81.* $2\sin^2 3x+\sin^2 6x=2$.

82. $\mathrm{tg}\,(45^\circ+x)+\mathrm{tg}\,(x-45^\circ)=4$.

83*. $\mathrm{tg}\,(x+a)=3\,\mathrm{tg}\,(x-a)$.

84*. $\mathrm{tg}\,(45^\circ+x)\,\mathrm{tg}\,x={}^1/_8$.

85. $\mathrm{tg}\,(60^\circ+x)\;(\mathrm{tg}\;60^\circ-x)=p$.

86. $\mathrm{tg}\,(a+x)\;\mathrm{tg}\,(a-x)=m$.

87. $2\sin^2x+\sin 2x=4\cos^2x$.

88. $\sin x=2\sin(45^\circ-x)$.

89*. $\sin x-p\sin(a-x)=0$.

90. $\dfrac{\sin x}{\sin(120^\circ-x)}=2$.

91. $\sin(a+x)=p\sin(a-x)$.

92.* $\sin x\sin(a-x)=p\cos^2x$.

93. $\sin x\sin(60^\circ-x)=0{,}25$.

94.* $\sin x\sin(60^\circ+x)=0{,}75$.

95*. $\sin^2x=p\cos x\sin(a+x)$.

96. $\mathrm{tg}\,(45^\circ+x)=2{,}6$.

97.* $\mathrm{tg}\,(45^\circ-x)=\mathrm{tg}\,2x$.

98. $a=b\cos 2x+\sin 2x$.

99*. $a(\cos x-\sin x)^2=b\cos 2x$.

100. $3(1-\cos x)=2\sin{}^1/_2x$.

101.* $a(1+\cos x)=b\cos{}^1/_2x$.

102. $\cos 2x=p\cos x$.

103. $\sin x = 2\sin y$ и $x + y = 60°$.
103a. $\operatorname{tg}(45° + x) = 2 + 3\operatorname{tg} x$.
104*. $\sin x + \cos y = {}^1/_2$ и $x + y = 120°$.
105. $\sin x + \sin(a - x) = 1$.
106. $\sin 2x = 4\cos^3 x$.
107. $a\sin x = b\cos y$ и $x - y - p$.
108. $8\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{ctg} {}^1/_2 x = 0$.
109. $\dfrac{\sin x}{\sin(b + x)} = \dfrac{\sin a}{2\sin c}$.
110. $\operatorname{tg}(45° - x) = 2{,}4\operatorname{tg} x$.
111. $\sin(x + a) = b\cos x$.
112. $3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + a)$.
113. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$.
114. $\sin x = 4\sin y$ и $x + y = 60°$.
115. $\sin x + \cos x = \sin 2x$.
116. $\sin x \cos(30° - x) = 0$.
117. $\operatorname{tg}(x - y) = 2^5/_6$; $\operatorname{tg}(x - y) = {}^1/_{18}$
118. $4\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(135° - x)$.
119. $\sin x + \cos x + \sin 2x = 2$.
120. $\cos(a + x) = \sin(x - a)$.
121. $\sin(a + x) - \sin a \cos x = \cos a$.
122. $\sin x = 3\sin(120° - x)$.
123. $\sin(a + x) = b\sin x + r\cos x$.
124. $\cos 2x + \cos(180° - x) = 0$.

ГЛАВА IV.

Вычисленіе тригонометрическихъ величинъ.

§ 39. Для рѣшенія $\triangle$-овъ надо знать тригонометрическія величины всѣхъ острыхъ и тупыхъ угловъ; формулы приведенія показываютъ однако, что достаточно составить тригонометрическія таблицы для угловъ отъ 0° до 45° (§ 18). Покажемъ, какъ могутъ быть составлены подобныя таблицы. Въ §§ 40, 41 и 42 будемъ x'омъ обозначать число, выражающее величину угла, если за единицу угловую принять уголъ, дуга котораго равна своему радіусу.

§ 40. Теорема. *Если $x < {}^1/_2\pi$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$*).* Такъ какъ при радіусѣ=1 величина угла и длина его дуги выражаются однимъ и тѣмъ же числомъ, то мы, описавъ изъ вершины даннаго угла x дугу радіусомъ, равнымъ 1, покажемъ, что (фиг. 17)

$$AD < \smile AC < EC.$$

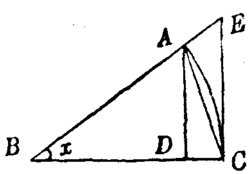
Такъ какъ $AD < AC$, а $AC < \smile AC$, то $AD < \smile AC$.

Далѣе, секторъ $ABC < \triangle EBC$, т.-е.,

$\dfrac{\smile AC \cdot BC}{2} < \dfrac{EC \cdot BC}{2}$, откуда, по сокращеніи на $\dfrac{BC}{2}$, имѣемъ: $\smile AC < EC$.

Итакъ $AD < \smile AC < EC$, слѣд., и

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$



Фиг. 17.

*) Иначе это можно выразить (§ 3) такъ: отношеніе дуги остраго угла къ радіусу больше синуса и меньше тангенса этого угла.

§ 41. Теорема. Предѣлъ отношенія $\frac{\sin x}{x}$ равенъ 1 при неопредѣленномъ уменьшеніи x

Такъ какъ $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, то

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \text{ или}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

$\cos x$ при уменьшеніи x стремится къ 1, а потому и отношеніе $\frac{\sin x}{x}$, заключающееся между 1 и $\cos x$, тоже безпредѣльно стремится къ 1 (но нигда не можетъ быть равно 1, пока x не равно нулю).

§ 42. Теорема. *Если $x < \frac{1}{2}\pi$, то $x - \sin x < \frac{1}{4}x^3$.* *)

Равенство (1) § 35 даетъ

$$\sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} \text{ или, умножая и дѣля}$$

на $\cos\frac{x}{2}$,

$$= 2 \operatorname{tg}\frac{x}{2} \cos^2\frac{x}{2}$$

$$= 2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right),$$

подставляя $\frac{x}{2}$ вм. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и $\sin\frac{x}{2}$, мы уменьшаемъ оба множителя, а потому

$$\sin x > 2 \cdot \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \text{ или}$$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{4}, \text{ откуда}$$

$$x - \sin x < \frac{x^3}{4}.$$

§ 43. На основаніи предыдущихъ теоремъ *можно* слѣдующимъ образомъ составить таблицы тригонометрическихъ величинъ угловъ, увеличивающихся послѣдовательно на одну и ту же величину, напр., на $1'$.

По §§ 40 и 42,

$$\sin 1' < 1' \text{ и } \sin 1' > 1' - \frac{(1')^3}{4},$$

*) Т. е. разность между отношеніемъ дуги остраго угла къ ея радіусу и косинусомъ угла меньше четверти куба этого отношенія.

но $1' = \frac{2\pi}{360 \cdot 60} = 0{,}000290888208$, т.-е. $1' < 0{,}0003$,

а $\frac{(1')^3}{4} < 0{,}000000000006$, слѣд..

$$\sin 1' < 0{,}000290888208 \text{ и}$$
$$\sin 1' > 0{,}000290888202.$$

Итакъ, у двухъ предѣловъ для $\sin 1'$ первыя 11 цифръ одинаковы, а потому съ точностью до $\frac{1}{10^{12}}$ (даже $^1/_2 \cdot \frac{1}{10^{12}}$) можемъ считать, что

$$\sin 1' = 0{,}000290888202.$$

Зная $\sin 1'$, можно найти $\cos 1'$ и т. д. Тригонометрическія функціи слѣдующихъ угловъ можно вычислить слѣдующимъ образомъ. По § 37 имѣемъ

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b,$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b.$$

Полагая $a = (p+1)\, b$, получимъ

$$\sin(p+2)\, b + \sin pb = 2 \sin(p+1)\, b \cos b,$$
$$\cos(p+2)\, b + \cos pb = 2 \cos(p+1)\, b \cos b, \text{ откуда}$$
$$\sin(p+2)\, b = 2 \sin(p+1)\, b \cos b - \sin pb \text{ и}$$
$$\cos(p+2)\, b = 2 \cos(p+1)\, b \cos b - \cos pb.$$

Если въ этихъ формулахъ*) дадимъ p послѣдовательныя значенія 0, 1, 2..., а $b = 1'$, то получимъ

$$\sin 2' = 2 \sin 1' \cos 1',$$
$$\cos 2' = 2 \cos^2 1 - 1,$$
$$\sin 3' = 2 \sin 2' \cos 1' - \sin 1' \text{ и т. д.}$$

Таблицы логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ.

§ 44. Въ 1614 г. были открыты логариѳмы шотландцемъ Джономъ Неперомъ (1550—1618) и независимо отъ него въ 1620 г. швейцарцемъ Юстомъ Бюргомъ (1552—1632). Таблицы тригонометрическихъ величинъ, неизбѣжныя до этого открытія, потеряли свое значеніе, и вмѣсто нихъ вошли въ употребленіе таблицы, содержащія логариѳмы этихъ величинъ.

§ 45. Таблицы пятизначныя. Въ столбцахъ съ надписью sin, tg, ctg и cos помѣщены логариѳмы соотвѣтствующихъ тригоно-

*) Предложены англійскимъ математикомъ Симпсономъ.

метрическихъ функцій. До 45° градусы и надписи sin и т. д. выставлены вверху столбцовъ, а минуты въ первомъ стобцѣ со знакомъ ′; счетъ ведется сверху. Послѣ 45° градусы и надписи cos и т. д. выставлены внизу тѣхъ же столбцовъ, а минуты въ послѣднемъ столбцѣ; счетъ ведется снизу. Каждый столбецъ имѣетъ двѣ надписи sin и cos, tg и ctg и т. д. по той причинѣ, что sin, tg, ctg и cos угловъ до 45° соотвѣтственно равны cos, ctg, tg и sin угловъ отъ 45° до 90°, слѣд., и логариѳмы ихъ равны, напр., $\lg \cos 52°2' = \lg \sin 37°58'$. Въ столбцахъ подъ буквою D помѣщены разности между двумя послѣдовательными логариѳмами синусовъ и косинусовъ. Разности между логариѳмами тангенсовъ и котангенсовъ помѣщены въ одномъ столбцѣ съ надписью d. c. (differentia communis). Существованіе одного столбца разностей понятно изъ слѣдующаго. Равенство $\mathrm{tg}a \,.\, \mathrm{ctg}a = 1$ даетъ $\lg \mathrm{tg}a + \lg \mathrm{ctg}a = 0$, а это послѣднее показываетъ, что съ увеличеніемъ $\lg \mathrm{tg}a$ на какую-нибудь величину h на ту же величину h долженъ уменьшиться $\lg \mathrm{ctg}a$.

§ 46. При употребленіи таблицъ надо помнить, что

I. Синусы и косинусы всегда, тангенсы отъ 0° до 45°, а котангенсы отъ 45° до 90° (§ 17)—правильныя дроби, поэтому ихъ логариѳмы отрицательны; въ таблицахъ же, во избѣжаніе отрицательныхъ чиселъ, каждый логариѳмъ въ указанныхъ предѣлахъ увеличенъ на 10, вслѣдствіе чего при вычисленіяхъ его надо уменьшать на 10, напр., табличный $\lg \sin 18°27' = 9{,}50034$, а истинный $\lg \sin 18°27' = 9{,}50034 - 10$ или $= \bar{1}{,}50034$.

II. Съ увеличеніемъ угла синусы и тангенсы, слѣд., и логариѳмы ихъ увеличиваются, косинусы же и котангенсы, слѣд., и логариѳмы ихъ уменьшаются.

§ 47. Отысканіе логариѳма тригонометрической функціи даннаго угла.

1-й случай: уголъ не содержитъ секундъ;

1) найти $\lg \cos 28°16'$. Градусы ищемъ вверху страницы, а сминуты въ 1-мъ столбцѣ. Число 9,94485, стоящее въ одной трокѣ съ 16′ и вь столбцѣ съ надписью *вверху* cos, есть искомый логариѳмъ;

2) найти $\lg \mathrm{tg}\, 58°42'$. Такъ какъ уголъ $> 45°$, то градусы ищемъ *внизу* страницы, а минуты въ послѣднемъ столбцѣ. Подобно предыдущему находимъ, что $\lg \mathrm{tg}\, 58°42' = 0{,}21609$.

2-й случай: уголъ содержитъ секунды;

1) найти lg sin 30°28′40″. Сначала находимъ lg sin 30°28 = =9,70504. Изъ таблицъ видимъ, что съ увеличеніемъ угла въ 35°28′ на 1′ или 60″ lg sin 30°28′ увеличивается на 21 стотысячную; предполагая, что съ увеличеніемъ угла на 40″ логариѳмъ его синуса увеличивается на x стотысячныхъ и что приращенія угла (когда они меньше 1′) пропорціональны приращеніемъ логариѳма, имѣемъ

$$60'' : 40'' = 21 : x, \text{ откуда}$$

$x = 14$ стотысячныхъ. Итакъ, lig sn 30°28′40″ = 9,70518.

Такъ вычислять x надо по таблицамъ Лаланда. Если въ таблицахъ (Рябкова, Пржевальскаго и др.) имѣются готовыя разности Р.Р., то x вычисляется проще: отыскавъ столбецъ съ надписью 21 (стотысячныхъ), найдемъ изъ него, что съ увеличеніемъ угла на 40″ логариѳмъ синуса увеличивается на $x = 14$ (стотысячныхъ).

2) найти lg ctg 70°13′36″. Находимъ lg ctg 70°13′ = 9,55593. Съ увеличеніемъ угла на 60″ логариѳмъ котангенса уменьшается (§ 44, II) на 39 стотысячныхъ, а съ увеличеніемъ угла на 36″ логариѳмъ уменьшится на x стотысячныхъ, слѣд.,

$$60'' : 36'' = 39 : x, \text{ откуда}$$

$x = 23$ (приблизительно) стотысячныхъ. Итакъ

$$\lg \operatorname{ctg} 70^\circ 13' 36'' = 9{,}55570.$$

§ 48. Пріемъ, употребляемый нами, когда уголъ содержитъ градусы, минуты и секунды, наз. *интерполяціей*. Основанъ онъ какъ мы видѣли, на допущеніи, что *разности угловъ пропорціональны разностямъ логариѳмовъ ихъ тригонометрическихъ величинъ*, и потому, строго говоря, неточенъ, въ чемъ легко убѣдиться разсматривая табличныя разности. Когда уголъ малъ (до 2°) или великъ (отъ 88° до 90°), то вышеупомянутыя разности не пропорціональны. Въ такомъ случаѣ пользуются дополнительными таблицами, гдѣ углы различаются не на 1′, а на 1″ или 10″; если же ихъ нѣтъ, то поступаютъ такъ: при помощи таблицъ вычисляютъ только логариѳмы синуса и тангенса малыхъ угловъ; что же касается угловъ отъ 88° до 90°, то ихъ тригонометрическія величины замѣняютъ тригонометрическими величинами угловъ дополнительныхъ. Вычисленіе логариѳмовъ синуса и тангенса угловъ отъ 0° до 2° производятъ такъ: положимъ, что нашъ уголъ$=a$, ближайшій изъ имѣющихся въ таблицахъ$=b$; обративъ ихъ въ секунды, получимъ соотвѣтственно A и B; такъ какъ для угловъ близкихъ къ нулю можно считать синусы и тангенсы пропорціональными угламъ (§ 39), то

$$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{A}{B} \text{ и } \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b}=\frac{A}{B}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

беря логариѳмы обѣихъ частей, найдемъ $\lg\sin a$ и $\lg\operatorname{tg} a$.

Примѣры: 1) Найти $\lg\sin 1^\circ5'42''$. Здѣсь $a=1^\circ5'42''$, $A=$ $=3942''$, $b=1^\circ5'$, $B=3900''$. Изъ уравненія (1) получимъ: $\lg\sin 1^\circ5'42''=\lg 3942-\lg 3900+\lg\sin 1^\circ5'=8{,}28127$.

2) Найти $\lg\operatorname{tg} 88^\circ43'56''$. Такъ какъ $\operatorname{tg} 88^\circ43'56''=$ $=\operatorname{ctg} 1^\circ16'4''=\dfrac{1}{\operatorname{tg} 1^\circ16'4''}$, то $\lg\operatorname{tg} 88^\circ43'56''=-\lg\operatorname{tg} 1^\circ16'4''=$ $=-(\lg 4560-\lg 4564+\lg\operatorname{tg} 1^\circ16')=1{,}65500$.

§ 49. Отысканіе угла по логариѳму его тригонометрической величины.

Если логариѳмъ имѣется въ таблицахъ, то уголъ опредѣляется легко (§ 46); въ противномъ случаѣ прибѣгаютъ къ интерполяціи.

Примѣры 1) Найти x, если $\lg\sin x=9{,}83297$. Въ столбцахъ съ надписью sin (вверху или внизу) ищемъ данный логариѳмъ. Находимъ его въ столбцѣ съ надписью sin вверху, поэтому градусы беремъ сверху, а минуты въ первомъ столбцѣ (§ 45); получаемъ: $x=42^\circ54'$.

2) Найти x, если $\lg\cos x=9{,}89075$. Даннаго логариѳма нѣтъ въ таблицахъ, поэтому беремъ наиболѣе подходящій 9,89071; онъ соотвѣтствуетъ углу въ $39^\circ58'$; такъ какъ $\lg\cos 38^\circ58'<$ $<\lg\cos x$, то $x<39^\circ58'$ (§ 46, II); чтобы узнать на сколько x меньше $38^\circ58'$, прибѣгаемъ къ интерполяціи: съ увеличеніемъ $\lg\cos 33^\circ58'$ на 10 стотысячныхъ уголъ уменьшится на $60''$, а съ увеличеніемъ $\lg\cos 38^\circ58'$ на 4 стотысячныхъ (разность между даннымъ 9,89075 и найденнымъ 9,89071) уголъ уменьшится на a'', слѣд., можно составить пропорцію $10:4=60'':a$, откуда $a=24''$. Итакъ, $x=38^\circ58'-24''=38^\circ37'36''$.

§ 50. Если по логариѳму видно, что уголъ близокъ къ 0° или 90°, то прибѣгаютъ къ рав. (1) § 48.

Примѣръ: Найти x если lg sin$x$=8,11009. Ближайшій логариѳмъ 8,10717 соотвѣтствуетъ углу въ 42′=2520″. По равенству (1) § 48 имѣемъ

$$\sin x : \sin 42' = x : 2520'', \text{ откуда}$$
$$\lg \operatorname{sig} x - \lg \sin 42' = \lg x - \lg 2520 \text{ или}$$
$$8{,}11009 - 8{,}10711 = \lg x - 3{,}40140, \text{ откуда}$$
$$\lg x = 3{,}40432, \text{ а } x = 2537 \text{ секундъ} = 42'17''.$$

§ 51. Степень точности при опредѣленіи угла по пятизначнымъ таблицамъ.

Обозначимъ табличную разность для логариѳма какой-нибудь тригонометрической величины черезъ ∂, т.-е. предположимъ, что съ измѣненіемъ ея логариѳма на ∂ стотысячныхъ уголъ измѣнится (§ 46, II) на 60″, слѣд., съ измѣненіемъ логариѳма на 0,00001 уголъ измѣнится на $\frac{60''}{\partial}$. Обратно, если углы отличаются на $\frac{60''}{\partial}$, то логариѳмы соотвѣтствующей тригонометрической величины отличаются на 0,00001; если же углы отличаются на величину меньшую $\frac{60''}{\partial}$, то логариѳмы отличаются на величину меньшую 0,00001, т.-е. разнятся въ 6-мъ десятичномъ знакѣ, и потому пятизначные логариѳмы будутъ одинаковы, слѣд.. ошибка въ опредѣленіи угла по пятизначному логариѳму его тригонометрической величины можетъ быть равна $\frac{60''}{\partial}$. Ошибка эта, очевидно, тѣмъ меньше, чѣмъ больше ∂. Покажемъ, что приращеніе логариѳма тангенса и котангенса равно суммѣ приращеній логариѳмовъ косинуса и синуса того же угла, и что поэтому **углы точнѣе опредѣляются по тангенсу и котангенсу, чѣмъ по синусу и косинусу**.

Возьмемъ lg tg$a$, lg sin$a$, lg cos$a$ и соотвѣтствующія приращенія ∂_1, ∂_2, ∂_3 ихъ. Изъ соотношенія $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$ имѣемъ $\lg \operatorname{tg} a = \lg \sin a - \lg \cos a$. Съ измѣненіемъ угла наши логариѳмы измѣнятся (§ 46, II), и мы получимъ:

$$\lg \operatorname{tg} a \pm \partial_1 = \lg \sin a \pm \partial_2 - (\lg \cos a \mp \partial_3),$$

откуда $$\partial_1 = \partial_2 + \partial_3, \text{ и т. д.}$$

Изъ таблицъ видно, что наименьшая разность для логариѳмовъ тангенса находится около 45°, а потому $\frac{60''}{\partial}$ или ошибка здѣсь наибольшая и равна 2″,4.

Для логариѳма синуса съ возрастаніемъ угла ∂ убываетъ, слѣд., $\frac{60''}{\partial}$ или ошибка возрастаетъ; она достигаетъ нѣсколькихъ минутъ для угловъ близкихъ къ 90°; поэтому такіе углы не слѣдуетъ опредѣлять по синусу; наоборотъ, углы близкіе къ 0° не слѣдуетъ опредѣлять по косинусу. Въ томъ и другомъ случаѣ вычисляютъ сначала тангенсъ, а уже по тангенсу—уголъ.

Преобразованіе нелогариѳмическихъ выраженій въ логариѳмическія.

§ 52. Для того, чтобы выраженіе можно было логариѳмировать, его, какъ извѣстно, надо представить въ видѣ одночлена. Правилъ для такого преобразованія нѣтъ. Укажемъ употребительнѣйшіе пріемы.

I. Если формула имѣетъ видъ: $\sin a \pm \sin b$, $\cos a \pm \cos b$, $\cos a \pm \sin b$, $1 \pm \operatorname{tg} a$, $1 \pm \cos a$, $1 \pm \sin a$, $\operatorname{ctg} a \pm \operatorname{ctg} b$ и т. д., то можно пользоваться равенствами §§ 37, 36 и 33.

Примѣры. 1) $\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos b}{\sin b} =$

$$= \frac{\sin b \cos a - \cos b \sin a}{\sin a \sin b} = \frac{\sin (b-a)}{\sin a \sin b}.$$

2) $1 + \sin a = 1 + \cos (90° - a) = 2\cos^2 (45° - {}^1/_2 a)$ по равенству (2) § 36.

При рѣшеніи треугольниковъ намъ придется превращать въ одночленъ суммы подобныя слѣдующимъ $\sin A + \sin B + \sin C$, $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$, гдѣ A, B и C суть углы треугольника (см. задачи § 63).

II. Если формула имѣетъ видъ отличный отъ предыдущихъ, то вводятъ **вспомогательный уголъ**. Сущность этого пріема видна изъ слѣдующихъ примѣровъ.

1) Дано $a \pm b$, гдѣ $a > 0$ и $b > 0$. Дадимъ формулѣ видъ

$a\left(1\pm\frac{b}{a}\right)$. Такъ какъ тангенсъ угла въ 1-й четверти измѣняется отъ 0 до $+\infty$ (§ 17), то, слѣд., есть такой острый уголъ x, для котораго $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}x$; вычисливъ отсюда x, имѣемъ

$$a\pm b=a\ (1\pm\operatorname{tg}x)=a\ (\operatorname{tg} 45^\circ\pm\operatorname{tg}x)=$$

$$=a\left(\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{a\ (\sin 45^\circ\pm x)}{\cos 45^\circ \cos x}=\frac{a\sqrt{2}\sin\ (45^\circ\pm x)}{\cos x}.$$

Пріемъ годится и тогда, когда $a<0$ или $b<0$; въ обоихъ случаяхъ $x>90^\circ$.

2) Дано $a+b$, гдѣ $a>0$ и $b>0$. Дадимъ формулѣ видъ $a\left(1+\frac{b}{a}\right)$

Такъ какъ $\frac{b}{a}>0$, то имѣемъ право положить $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}^2x$; получимъ:

$a\ (1+\operatorname{tg}^2x)=a\ \operatorname{sc}^2x=\frac{a}{\cos^2x}$.

3) Полагая въ предыдущемъ примѣрѣ $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}x$, получимъ

$$a\ (1+\operatorname{tg}x)=a\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{a\ (\cos x+\sin x)}{\cos x},$$

но $\cos x+\sin x=\sin\ (90^\circ-x)+\sin x$ или, по § 37,

$$=2\sin 45^\circ \cos (45^\circ-x)=\sqrt{2}\cos\ (45^\circ-x),$$

слѣд., $a+b=\frac{a\sqrt{2}\cos\ (45^\circ-x)}{\cos x}$.

Если $a<0$ или $b<0$; то $x>90^\circ$.

4) Дано $a-b$, гдѣ $a>0$ и $b>0$. Какъ въ 3-мъ примѣрѣ получимъ

$$a-b=a\ (1-\operatorname{tg}x)=a\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{a\ (\cos x-\sin x)}{\cos x},\text{ но}$$

$$\cos x-\sin x=\cos x-\cos\ (90^\circ-x)=2\sin 45^\circ\ \sin\ (45^\circ-x)=$$

$$=\sqrt{2}\sin\ (45^\circ-x),\text{ слѣд.,}$$

$$a-b=\frac{a\sqrt{2}\sin\ (45^\circ-x)}{\cos x}$$

Если $a<0$ или $b<0$, то $x>90°$.

5) Если въ 4-мъ примѣрѣ $\frac{b}{a}<1$, то можно (§ 17) положить $\frac{b}{a}=\cos x$ или $\sin y$. Въ первомъ случаѣ

$$a-b=a\ (1-\cos x)=2a\ \sin^2\frac{x}{2},$$

во второмъ $a-b=a\ (1-\sin y)=2a\sin^2\left(45°-\frac{y}{2}\right)$.

Если $a<0$ или $b<0$, то $x>90°$ и $y>180°$.

6) Такъ какъ въ 4-мъ примѣрѣ $\frac{b}{a}>0$ и <1, то можно положить $\frac{b}{a}=\sin^2 x$ или $\cos^2 x_1$; поэтому $a-b=a\ (1-\sin^2 x)=$ $=a\cos^2 x$ или $a\ (1-\cos^2 x_1)=a\sin^2 x_1$.

7) $\sqrt{a+b-c}$, гдѣ $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $a+b-c>0$.

Сначала, какъ во 2-мъ примѣрѣ, преобразуемъ $a+b$ въ $\frac{a}{\cos^2 x}$. Беря подъ знакомъ корня первый членъ за скобки, получимъ $\sqrt{\frac{a}{\cos^2 x}\left(1-\frac{c}{a}\cos^2 x\right)}$;

такъ какъ

$$\frac{c}{a}\cos^2 x>0 \text{ и } <1, \text{ то полагаемъ}$$

$$\frac{c}{a}\cos^2 x=\cos^2 y;$$

получимъ

$$\sqrt{\frac{a}{\cos^2 x}\,(1-\cos^2 y)}=\frac{\sin y}{\cos x}\sqrt{a}.$$

Изъ этого примѣра видно, что, введя нѣсколько вспомогательныхъ угловъ, можно многочленъ преобразовать въ одночленъ.

Примѣчаніе. Если числовая величина данной формулы отрицательная, то логариѳмируя, принимаютъ въ расчетъ абсолютныя величины входящихъ въ нее количествъ, а знакъ минусъ ставятъ передъ окончательнымъ результатомъ.

Задачи. Найти логариѳмъ синуса слѣдующихъ угловъ

1. 32°46′. **2.** 24°. **3.** 45°. **4.** 63°35′,
5. 45°30′. **6.** 132°12′. **7.** 18°19′24′. **8** 12°25′30″.
9 37°48′17″. **10.** 50°20′18″. **11.** 69′44′56″. **12.** 80°17′40″.
13. 140°25′14″. **14** 320°17′40″. **15.** 192°25′30″. **16.** 133°47′41″.
17. 100°19′6″. **18.** 285°26′32″. **19.** 198°46′8″. **20.** 152°17′26″.

Найти логариѳмъ тангенса угловъ

21. 57°31′40″. **22.** 38°40′12″. **23.** 25°17′42″. **24.** 64°34′12″.
25 42°34′50″. **26** 71°1′34″. **27.** 108°30′14″. **28.** 200°50″.
29. 45°38″. **30.** 65°18′34″. **31** 52°38″. **32.** 70°26″.

Найти логариѳмъ косинуса угловъ

33. 20°18′16″. **34.** 38°44′25″. **35.** 68°17′38″. **36.** 54°50′42″.
37. 49°5′14″. **38.** 77°34′30″. **39.** 162°18′42″. **40** 354°17′16″.
41. 8°20′36″. **42.** 38°4′25″. **43.** 16°37′48″. **44.** 10°26″.

Найти логариѳмъ котангенса угловъ

45. 39°48′12″. **46** 51°4′14″. **47.** 70°48′29″. **48.** 106°18′24″.
49. 236°7′15″. **50.** 22°17′4″. **51.** 45°40″. **52.** 32°54″.

Найти логариѳмы слѣдующихъ тригонометрическихъ величинъ

53. sin 1°8′16″,2. **54.** sin 1°12′43″,8. **55.** tg 52′48″,6.
56. cos 1°16′20″. **57.** ctg 89°16′20″. **58.** tg 89°50′30″.
59. sin 89°6′32″. **60.** ctg 1°16′4″. **61.** cos 88°54′16″.

Найти x, зная, что lg sin x равенъ

62 9,62865. **63.** 9,87438. **64** 9,97996. **65.** 9,62933.
66. 9,70945. **67.** 8,81267. **68.** 9,90799. **69** 9,87977.
70. 9,27732. **71.** 9,75480. **72.** 9,91428. **73.** 9,86487.

Найти x, зная, что lg cos x равенъ

74. 9,62865. **75.** 9,95427. **76.** 9,91746. **77.** 9,89193.
78. 9,95641. **79.** 9,75865. **80.** 9,84920. **81.** 9,33303.
82. 9,90844. **83.** 9,50654. **84.** 9,86487. **85.** 9,82700.

Найти x, если lg tg x равенъ

86. 9,74345. **87.** 0,74345. **88** 0,32571. **89.** 0,00619.
90. 0,58661. **91.** 9,58661. **92.** 0,96512. **93.** 8,96512.
94. 1,04360. **95.** 0,13887. **96.** 9,65420. **97.** 9,77372.
98. 9,88630. **99.** 0,3. **100.** 0,18. **101.** 9,86.

Найти x, если lg ctg x равенъ

102. 0,87475. **103.** 9,87475. **104.** 9,96328. **105.** 0,96328.
106. 9,74241. **107.** 9,16105. **108.** 9,67448. **109.** 9,65051.

Найти

110. $\cos 130°16'$. **111.** $\mathrm{tg}\ 170°22'$. **112.** $\sin 252°13'16''$.
113. $\cos 200°16'$. **114.** $\mathrm{tg}\ 408°18'$. **115.** $\sin 24°16'42''$.
116. $\cos 52°17'9''$. **117.** $\mathrm{tg}\ 62°8'10''$. **118.** $3{,}5 \sin 73°8'20''$.
119. $2\ \mathrm{ctg}\ 80°16'2''$. **120.** $\sin 1{,}98$. **121.** $\mathrm{tg}\ 2{,}14$.
122. $\cos \frac{1}{\pi}$. **123.** $\mathrm{ctg}\,{}^2/{}_3\pi$. **124.** $\sin 1{,}4$.
125. $36 \sin 42°8'15''$. **126.** $9{,}6 \cos 28°30'16''$.
127. $24{,}5 \sin 26°8'19'' \cos 63°20'30''$.

128. $\dfrac{4{,}32}{\sin 26°}$. **129.** $\dfrac{6{,}32\ \mathrm{tg}\ 32°17'}{\cos 20°48''}$.

130. $\dfrac{83{,}5 \sin 42°27'30''}{\sin 73°6'28''}$. **131.** $\dfrac{106 \sin 27°18'5''}{\cos 12°20'' \cos 35°48'36''}$.

132. $\dfrac{25{,}4\ \mathrm{tg}\ 73°20'50''}{\mathrm{ctg}\ 28°16'}$. **133.** $\dfrac{30{,}9 \sin 20°30'40 \cos 62°8'}{\mathrm{tg}\ 75°24'}$.

134. $\dfrac{62\ \mathrm{tg}\ 1{,}2}{10{,}5\ \mathrm{ctg}\ 3{,}8}$. **135.** $\mathrm{tg}\sqrt{\sin 2{,}08}$.

136. $\dfrac{27 \sin 35°20' \sin 72°30''}{16\ \mathrm{tg}\ 58°24''}$. **137.** $\sqrt[100]{\mathrm{ctg}\left(\sin \frac{2}{\pi}\right)^{-0{,}05}}$

138. $\dfrac{(2{,}562)^2 \cos 36°16'}{\sqrt{\mathrm{ctg}\ 72°24'}}$. **139.** $\mathrm{ctg} \cos 32°15'$.

140. $0{,}34 \,.\, 5^{-1}\ \mathrm{tg}\ 126°15'30''\ \mathrm{sc}\ 108°7'16''$.

Найти наименьшее значеніе x, если

141. $\sin x = 0{,}289$. **142.** $\cos x = 0{,}3675$. **143.** $\mathrm{tg}\,x = 0{,}915$.
144. $\mathrm{tg}\,x = 1{,}36$. **145.** $\mathrm{ctg}\,x = 3$. **146.** $\sin x = {}^{15}/{}_{38}$.
147. $\cos x = {}^{17}/{}_{35}$. **148.** $\mathrm{ctg}\,x = {}^{3}/{}_{11}$. **149.** $\mathrm{tg}\,x = \sqrt{24{,}3}$.
150. $\cos x = \sqrt{{}^{17}/{}_{21}}$. **151.** $\sin x = \sqrt[3]{5{,}18}$. **152.** $\sin{}^1/{}_2 x = \sqrt{0{,}4}$.
153. $\mathrm{tg}\,{}^1/{}_2 x = \sqrt{1{,}4}$. **154.** $\sin x = -0{,}46$. **155.** $\cos x = -0{,}83$.
156 $\mathrm{tg}\,x = -{}^3/{}_7$. **157.** $\mathrm{tg}\,x = -1{,}34$. **158.** $\mathrm{tg}\,x = -1{,}348$.
159. $\mathrm{tg}\,x = 5 \sin x$. **160.** $5\ \mathrm{tg}\,x = 14\ \mathrm{ctg}\,x$. **161.** $\mathrm{tg}\,x = 3 \cos x$.
162. $\cos x = 2{,}5 \sin 20°$. **163.** $\mathrm{tg}\,x = 27 \cos 58°16'20''$.
164. $\mathrm{ctg}\,x = 9{,}6\ \mathrm{tg}\ 20°16'50''$. **165.** $\mathrm{tg}\ 20°16'28'' : \mathrm{tg}\,x = 25{,}8 : 40{,}6$.

166. $\sin x = \dfrac{38 \cos 62°8'44''}{19{,}6}$. **167.** $\mathrm{tg}\,x = \dfrac{0{,}24\ \mathrm{tg}\ 53°6'14''}{2{,}008}$.

168. $\sin{}^1/{}_2 x = 1{,}8 \cos 60°8'49''$. **169.** $\mathrm{tg}\,{}^1/{}_2 x = 4{,}8 \cos 37°26''$.

170. $\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{27 \sin 48°35'26''}{\cos 23°15'16''}$. **171.** $\cos x = \dfrac{\sin 75°30'24''}{7{,}4\ \mathrm{tg}\ 36°8'}$.

172. $\sin x = 0{,}35 \cos(-70°25')$. **173.** $\mathrm{tg}^2 x = -4 \cos 196°37'46''$.
174. $\sin x = {}^3/{}_8 \cos^2(45° - \alpha)$, гдѣ $\alpha = 60°21'38''$.

175. $\sin x = -1{,}62 \cos 70°15'\ \mathrm{tg}\ 28°36''$. **176.** $\mathrm{tg}\,x = -\dfrac{5 \cos 38°42'}{\sin 40°51'}$.

177. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\sin 192°28'13''}{\sin 116°31'54'' \sin 65°54'19''}$. **178.** $\operatorname{tg} x = \dfrac{0{,}72\sqrt[3]{\operatorname{tg} 120°30'}}{\sin 17°56'40''}$.

179. $\sin(x-y) = 0{,}6 \sin 28°5'16''$ и $x+y = 64°29''$.

180. $3 \operatorname{ctg} x = 5 \cos x$.

181. $\sin x = {}^3/_4 \cos x$.

182. $\sin x - \cos x = 0$.

183. $\cos x + \sin x = 0$.

184. $8 \sin x - 7 \cos x = 0$.

185. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4{,}2$.

186. $\sin x + 4 \operatorname{ctg} x = 2 \csc x$.

187. $\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

188. $1 + \cos x = 2 \sin x$.

189. $\cos 2x = \sin x - 1$.

190. $5 \cos x = 4 \cos y$ и $\cos(x-y) = 0{,}1$.

191. $\sin(x-a) = \cos(x+a)$.

192. $2 \sin(x+a) = \sin a + \cos a$.

193. $\operatorname{tg} {}^1/_2 x = \csc x - \sin x$.

194. $5 \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 2 \operatorname{tg}^2 x - 3$.

195. $5 \sin x = 2 \operatorname{tg} {}^1/_2 x$.

196. $1{,}5 = 2^{\cos x}$.

197. $\operatorname{ctg} x = \sqrt[30]{\cos \sqrt[40]{\sin \sqrt[50]{0{,}5}}}$.

198. $\operatorname{ctg} x = 345{,}6 \cos 163°18' (-\operatorname{tg} 7°12')^3$.

199. Найти уголъ, тангенсъ котораго вдвое больше котангенса.

200. Найти уголъ, котораго тангенсъ и косинусъ равны между собою.

201. Уголъ въ 72° раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы тангенсъ одной изъ нихъ равнялся 3,4.

202. Уголъ въ 45° раздѣлить на двѣ части, тангенсы которыхъ относились бы какъ 5 : 6.

203. Дугу въ 45° раздѣлить на такія двѣ части, чтобы синусъ одной былъ вдвое больше синуса другой.

204. Уголъ въ 128°15′ раздѣленъ на двѣ такія части, что синусъ одной равенъ косинусу другой. Найти части.

205. Уголъ, тангенсъ котораго равенъ —2, раздѣленъ на двѣ части, синусы которыхъ относятся какъ 2 : 5. Найти части.

206. Рѣшить систему $x \sin y = 0{,}926$ и $x \cos y = 3{,}28$

207. Лучъ падаетъ изъ воздуха на поверхность воды подъ угломъ въ 36°25. Найти уголъ преломленія (показатель пр. воды $= 1{}^1/_3$).

208. Синусы острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника относятся какъ 3 : 7. Найти эти углы.

Дать видъ удобный для логариѳмированія слѣдующимъ выраженіямъ (209—259):

209. $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$.

210. $1 - \operatorname{tg} b$.

211. $\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} b$.

212. $\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b$.

213. $1 + \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} b$.

214. $b(\operatorname{tg} x - 1)$.

215. $1 + \operatorname{ctg} a$.

216. $1 - \sin a$.

217. $\cos 2a - 1$.

218. $\operatorname{tg} a - \sin a$.

219. $\sin a + 1$.

220. $1 + 2 \sin a$.

221. $2 \cos a - 1$.

222. $1 - \operatorname{tg}^2 a$.

223. $\sin x + \cos x$.

224. $\sin a + \cos b$.

225. $\cos a + \sin(2a - 90°)$

226. $\cos(a - 90°) + \cos a$

227. $1 + \cos a$.

228. $1 + \cos a + \sin a$.

229. $1 - \cos a + \sin a$.

230. $1 - 2 \cos^2 a$.

231. $2 - 3 \cos a$.

232. $a \sin a + b \cos a$.

233. $a \cos^3 x + b \sin x \cos^2 x + b \sin^3 x + a \sin^2 x \cos x$.

234. $\cos^2(a+b) - \sin^2 a$,

235. $\sin^2 a + \sin^2 b$.

236. $\sqrt{\operatorname{tg} a + \sin a}$.

237. $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$.

238. $\sqrt{a^2+b^2}$.

239. $\sqrt[m]{a^n+b^n}$.

240. $\sqrt{a^2+b^2\cos^2 A}$.

241. $\sqrt{p^2\cos^2 a+q^2\sin^2 a}$.

242. $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos m}$.

243. $\dfrac{2+5\cos a}{5\sin a}$.

244. $\sqrt{a-b\cos m}$.

245. $\sqrt{a\cos^2 A+b\sin^2 A}$.

246. $\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$.

247. $b\cos A+\sqrt{a^2-b^2\cos A}$.

248. $\sqrt{\operatorname{tg} a+\sin a}+\sqrt{\operatorname{tg} a-\sin a}$.

249. $p\sin a-q\sin b$.

250. $(5\sqrt{2}+\sqrt{3})\sin 40°$.

251. $\sqrt{a-b}+c$.

252. $\sqrt{\operatorname{ctg}^2 a-1}$.

253. $2-\cos^2 a$.

254. $3+4\operatorname{tg}^2 a$.

255. $2+3\sin^2 a$.

256. $3-2\sin^2 a$.

257. $2-3\sin^2 a$.

258. $\operatorname{tg}(\alpha+45)+\operatorname{tg}(\alpha-45°)$.

259. $\operatorname{ctg}(30°-\alpha)+\operatorname{ctg}(60°+\alpha)$.

Найти наименьшее значеніе x, если

260. $\operatorname{tg} x=1+\cos 52°$.

261. $\sin x=1+\sin 63°$.

262. $\sin x=1-\sin 63°$.

263. $\cos x=1+\cos 118°$.

264. $\cos x=1-\cos 118°$.

265 $\operatorname{ctg} x=1+\sin 142°$.

266. $\sin x+\sin 32°=1$.

267. $\cos x+\cos 70°=1$.

268. $5\operatorname{ctg} x=\sin 56°29'-\sin 20°16$.

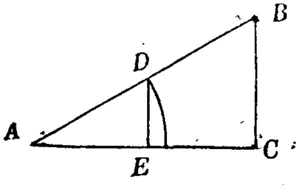
269. $3\sin x=\cos 78°20'+\cos 48°11'$.

ГЛАВА V.

Зависимость между сторонами и углами прямоугольнаго треугольника.

§ 53. Въ послѣдующемъ изложеніи углы треугольника будемъ означать буквами A, B и C, а противоположныя стороны соотвѣтственно буквами a, b и c.

§ 54. Теорема. Катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ противолежащаго ему угла или на косинусъ прилежащаго.



Фиг. 18.

Данъ прямоугольный $\triangle ABC$ (фиг. 18). Описавъ изъ вершины A дугу радіусомъ $AD=1$, опустимъ перпендикуляръ DE; въ такомъ случаѣ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, слѣд.,

$BC : DE=AB : AD$ или $a : \sin A=c : 1$,

откуда
$$a=c\sin A \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

такъ же точно можно доказать, что

$$b=c\sin B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Такъ какъ $$A+B=90^\circ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

то $\sin A=\cos B$ (§ 7) и, наоборотъ, $\sin B=\cos A$, слѣд.,

$$a=c\cos B \text{ и } b=c\cos A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Вопросъ. Нельзя ли на основаніи §§ 5 и 6 сказать, что $\frac{BC}{AB}=\sin A$, откуда $BC=AB\sin A$ или $a=c\sin A$?

Замѣчаніе. Изъ геометріи извѣстно, что прямоугольный треугольникъ опредѣляется двумя его элементами, слѣд., для вычисленія неизвѣстныхъ трехъ элементовъ необходимо и достаточно имѣть *три* уравненія; такими **тремя основными независимыми уравненіями** будемъ считать (1), (2) и (3); всѣ остальныя (§ 54 и 55) уравненія, связывающія углы и стороны прямоугольнаго треугольника, суть слѣдствія этихъ трехъ. Покажемъ, напр., что извѣстное равенство $c^2=a^2+b^2$ представляетъ слѣдствіе основныхъ равенствъ (1), (2) и (3). Въ самомъ дѣлѣ, по рав. (1) и (2) имѣемъ

$$a=c\sin A \text{ и } b=c\sin B$$

или, въ силу равенства (3)

$$a=c\cos B \text{ и } b=c\cos A.$$

Умножая первое равенство на a, а второе на b и складывая почленно полученныя равенства, найдемъ:

$$a^2+b^2=c\,(a\cos B+b\cos A).$$

Опустивъ изъ C на AB (фиг. 18) перпендикуляръ CM, получимъ:

$$BM=a\cos B,\ AM=b\cos A, \text{ слѣд.,}$$
$$a^2+b^2=c\,(BM+AM) \quad \text{или} \quad a^2+b^2=c^2.$$

Вопросъ. Въ чемъ заключалось бы неправильность слѣдующаго вывода предыдущаго равенства: возвышая въ квадратъ равенства $a=c\sin A$ и $b=c\cos A$ и складывая, имѣемъ

$$a^2+b^2=c^2(\sin^2 A+\cos^2 A), \text{ но } \sin^2 A+\cos^2 A=1, \text{ слѣд.,}$$
$$a^2+b^2=c^2.$$

§ 55. Теорема. Катетъ равенъ другому катету, умноженному на тангенсъ угла, противолежащаго первому.

По § 54 имѣемъ, что $a=c\sin A$ и $b=c\cos A$; дѣля почленно эти равенства, получимъ

$$\frac{a}{b}=\operatorname{tg} A, \text{ откуда}$$

$$a = b \operatorname{tg} A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

или, по § 7,

$$a = b \operatorname{ctg} B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Задачи. Показать, что въ прямоугольномъ $\triangle$-ѣ имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства:

1. $2ab = c^2 \sin 2A$.
2. $2b^2 = c^2 \operatorname{tg} B \sin 2A$.
3. $\operatorname{tg} {}^1\!/_2 A = \sqrt{\dfrac{c-b}{c+b}}$.
4. $\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B = \dfrac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A}$.
5. $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$.
6. $\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B$.
7. $\sin C = \dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$.
8. $\cos A \cos B \sin C = \dfrac{\sin A + \sin B}{\operatorname{sc} A + \operatorname{sc} B}$.

Основные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ.

§ 56. Для рѣшенія прямоугольнаго треугольника, какъ извѣстно изъ геометріи, достаточно знать два элемента (въ числѣ ихъ должна быть, по крайней мѣрѣ, одна сторона):

1. Катеты.
2. Гипотенузу и катетъ.
3. Гипотенузу и острый уголъ.
4. Катетъ и острый уголъ.

І-й случай. Даны a и b.

Изъ уравненій $a = b \operatorname{tg} A$ и $a = b \operatorname{ctg} B$ опредѣляемъ A и B. Гипотенузу удобнѣе опредѣлить изъ уравненія $b = c \cos A$, чѣмъ изъ $c^2 = a^2 + b^2$. Въ самомъ дѣлѣ рѣшая логариѳмами уравненіе $c^2 = a^2 + b^2$, мы должны ему дать видъ

$$c^2 = b^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right);$$

а полагая

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} x,$$

получимъ

$$c^2 = b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 x) = b^2 \operatorname{sc}^2 x = \frac{b^2}{\cos^2 x},$$

откуда

$$b = c \cos x.$$

Такимъ образомъ оказывается, что $x = A$ и что, слѣд., этотъ второй болѣе сложный пріемъ опредѣленія c ничѣмъ не отличается отъ перваго.

2-й случай. Даны c и b.

Изъ уравненій (1) и (2) § 54 имѣемъ

$$\cos A = \sin B = \frac{b}{c},$$

а катетъ $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)}$.

Замѣчаніе. Если b и c почти одинаковы, то B и C также почти одинаковы, слѣд., A близокъ къ 0°; въ этомъ случаѣ A и B (§ 51) опредѣляютъ по тангенсу, пользуясь формулой

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}},$$

откуда подставляя $\frac{b}{c}$ вм. $\cos A$, получимъ

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 A = \sqrt{\frac{c - b}{c + b}}.$$

3-й случай. Даны c и A.

Катеты опредѣляются изъ уравненій

$$a = c \sin A, \qquad b = c \cos A.$$

4-й случай. Даны a и A.

Катетъ b и гипотенузу c опредѣляемъ изъ уравненій

$$a = b \operatorname{tg} A \quad \text{и} \quad a = c \cos A.$$

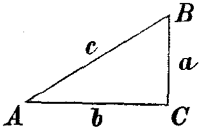
§ 57. Образецъ вычисленій.

Прямоугольный треугольникъ. 4-й случай.

Данныя.

$a = 237{,}64$ м.

$A = 58°20'35''$



Фиг. 22.

Искомыя.

$B = 31°39'25''$

$c = 279{,}185$ м.

$b = 146{,}524$ м.

Формулы:

$$B = 90° - A, \qquad c = \frac{a}{\sin A}, \qquad b = \frac{a}{\operatorname{tg} A}$$

1) Вычисленіе B

$$
\begin{aligned}
90^\circ &= 89^\circ 59' 60'' \\
A &= 58^\circ 20' 35 \\
\hline
B &= 31^\circ 39' 25''
\end{aligned}
$$

2) Вычисленіе c

$$
\begin{array}{rl}
\lg 237{,}64 = 2{,}37585 & \partial = 18 \\
+ \qquad\qquad + \ 7 & 1 \ldots 7{,}2 \\
\hline
2{,}37592 & \\
\text{доп.}\ \lg \sin 58^\circ 20' 35'' = 0{,}06996 & \\
\lg c = 2{,}44588 & \\
279{,}1 \ \ldots \ 76 & \partial = 16 \\
12 & \\
8 \ \ldots \ 11{,}2 & \\
0{,}8 & \\
5 \ \ldots \ 0{,}8 & \\
\hline
c = 279{,}185 &
\end{array}
$$

3) Вычисленіе b.

$$
\begin{array}{rl}
\lg 237{,}64 = 2{,}37592 & \\
+\ \text{доп}\ \lg \operatorname{tg} 58^\circ 20' 35'' = \bar{1}{,}18999 & \\
\hline
\lg b = 2{,}16591 & \\
146{,}5 \ \ldots \ 84 & \partial = 29 \\
7 & \\
2 \ \ldots \ 5{,}8 & \\
1{,}2 & \\
4 \ \ldots \ 1{,}16 & \\
\hline
b = 146{,}524 &
\end{array}
$$

Вспомогательныя вычисленія

$$
\begin{array}{rl}
\lg \sin 58^\circ 20' 35'' = \bar{1}{,}92999 & \\
+\ 5 & \partial = 8 \\
\hline
\bar{1}{,}93004 & 30'' \ldots 4 \\
& 5'' \ldots 0{,}67 \\
\text{доп.}\ \lg \sin 58^\circ 20' 35'' = 0{,}06996 & 35'' \ldots 4{,}67
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\lg \operatorname{tg} 58^\circ 20' 35'' = 0{,}20985 & \\
+\ 16 & \partial = 28 \\
\hline
0{,}21001 & 30'' \ldots 14 \\
& 5'' \ldots 2{,}33 \\
\text{доп.}\ \lg \operatorname{tg} 58^\circ 20' 35'' = \bar{1}{,}78999 & 35'' \ldots 16{,}33
\end{array}
$$

Задачи.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ, если

1. $a=28{,}12$ и $b=10{,}6$.
2. $c=83{,}5$ и $a=38{,}1$.
3. $c=25$ и $b=24$.
4. $c=230{,}4$ и $A=42^\circ 20'$.
5. $a=11{,}8$ и $B=1{,}0472$.
6. $a=52{,}4$ и $A=57^\circ 28'$.
7. $c=56$, $B=62^\circ 8' 12''$.
8. $c=42{,}6$, $B=88^\circ 20'$
9. $a=20$, $B=32^\circ 48' 20''$.
10. $a=53{,}7$, $B=1^\circ 25'$.
11. $b=2{,}8$, $A=50^\circ 44'$.
12. $c=5$, $a+b=7$.
13. $c=26$, $a-b=14$.
14. $a+b=29{,}1$, $a-b=7{,}5$.
15. $c+b=5$, $c-b=0{,}2$.
16. Найти площадь, зная, что $a=28$ и $B=41^\circ 8''$.
17. Гипотенуза $c=38{,}4$, а катетъ находится отъ ея средины на разстояніи $p=10{,}15$. Рѣшить $\triangle$ (2).
18. Гипотенуза равна 68, уголъ $32^\circ 16' 20''$. Рѣшить треугольникъ.
19. Площадь $s=270$, гипотенуза $c=39$. Рѣшить треугольникъ.
20. Площадь $s=146$, уголъ $A=20^\circ 48''$. Рѣшить треугольникъ.

21. Гипотенуза $c=25$; перпендикуляръ, опущенный на нее изъ вершины прямого угла $m=12$. Рѣшить треугольникъ.

22. Уголъ прямоугольнаго $\triangle$, вписаннаго въ окружность радіуса $R=23{,}3$, содержитъ $\alpha=28°16'$. Рѣшить треугольникъ.

23. Хорда въ 28 м. отстоитъ отъ центра на 28 м. Найти стягиваемую ею дугу (1).

24. Радіусъ круга=42 м. Найти дугу, стягиваемую хордою въ 50 м.

25. Вычислить хорду, соотвѣтствующую дугѣ, равной радіусу.

26. Хорда въ 34,8 м. длиною стягиваетъ дугу въ 40°18'34". Найти радіусъ (6).

27. Найти уголъ между касательной и сѣкущей, проходящей чрезъ центръ, зная, что радіусъ круга $r=32{,}9$, а касательная $a=51{,}6$ (1).

28. Найти радіусъ параллели г. Харькова, широта котораго 49°59'19". Радіусъ земли 6000 в.

29. Высота пирамиды (правильной) $h=394{,}1$, а ребро $a=975{,}6$. Найти уголъ между ребромъ и основаніемъ и уголъ между ребрами.

30. Найти уголъ между высотой и образующей конуса (прямого), высота котораго $h=3782$, а діаметръ основанія $\partial=11270$.

31. Тѣнь вертикально стоящаго шеста длиною въ $a=7$ ф. равна $b=4$ ф. Найти высоту солнца (1).

32. Высота прямого конуса $h=99$ м., а уголъ между образующей и основаніемъ $\alpha=78°34'44''$. Найти объемъ (9).

33. Вычислить дугу, соотвѣтствующую хордѣ, которая составляетъ $^3/_7$ діаметра.

34. Изъ точки, отстоящей отъ окружности радіуса $r=5$ м. на $b=7$ м., проведены касательныя. Найти ихъ длину и уголъ между ними.

35. Вычислить уголъ между касательными, проведенными къ окружности изъ точки, наибольшее и наименьшее разстоянія которой отъ окружности равны $a=136{,}97$ м. и $b=58$ м. 15 см. (2)

36. Діагонали ромба равны $D=4{,}736$ м и $\partial=2{,}948$ м. Вычислить его углы (1).

37. Радіусъ круга $R=8{,}6$ м. Найти длину хорды, на которую опирается центральный уголъ въ $\alpha=35°12'$ (7).

38. Найти сторону правильнаго 9-угольника, вписаннаго въ кругъ, радіуса $r=5$ м. (4).

39. Апоѳема (правильной) пирамиды $a=93{,}4$ м, апоѳема ея основанія $b=50{,}4$ м. Найти наклоненіе грани къ основанію.

40. Вычислить взаимное наклоненіе граней тетраэдра.

41. Въ окружность радіуса $r=64$ м. вписанъ уголъ въ $\alpha=32°4'$. Найти длину хорды, на которую онъ опирается (4 или 22).

42. Найти сторону правильнаго $n=36$-угольника, описаннаго около круга радіуса $r=25$ м. (9).

43. Опредѣлить площадь правильнаго вписаннаго въ кругъ радіуса $r=5{,}67$ м. 19-угольника.

44. Какая сила удержитъ грузъ въ 254 ф. на плоскости, наклоненной къ горизонту подъ угломъ въ 30°18'?

45. Рѣшить прямоугольный $\triangle$, зная одинъ изъ угловъ его $B=30°18'$ и биссекторъ другого $m=15$ м.

46. Опредѣлить длины биссекторовъ угловъ треугольника, гипо-

тенуза котораго a, а уголъ α.

47. Прямая BD, соединяющая средину D катета AC съ вершиною противолежащаго угла, содержитъ $a=1,5$ м. и составляетъ съ другимъ катетомъ уголъ $\alpha=41°14'18''$. Опредѣлить катеты и углы треугольника.

48. Опредѣлить площадь прямоугольнаго треугольника по углу α и биссектору k прямого угла.

49. Опредѣлить площадь сегмента, зная, что хорда его дуги равна $a=18,3$ м., а радіусъ $r=10,2$ м.

50. Стороны прямоугольника равны $a=12,4$ и $b=26$. Найти уголъ между діагоналями.

51. Высота равнобедреннаго $\triangle$-а $h=12,4$ м., а основаніе $b=40,6$ м. Найти уголъ и бокъ.

52. Отношеніе катетовъ равно $\frac{m}{n}={}^{38}/_{56}$. Найти углы.

53. Опредѣлить углы прямоугольнаго $\triangle$-а, зная, что катетъ его раздѣленъ биссекторомъ противолежащаго угла на части въ отношеніи $a:b$.

54. Сила въ 99 пуд. уравновѣшана на наклонной плоскости силою въ 20 пуд., параллельною ея основанію. Найти наклоненіе плоскости къ горизонту.

55. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $35°25'8''$, основаніе $b=25,6$. Найти площадь (6).

56. Уголъ при основаніи равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $\alpha=60°9'48''$, одна изъ равныхъ высотъ $h=25,1$ м. Опредѣлить площадь.

57. Діагональ правильнаго 5-угольника равна $\partial=8,9$ м. Найти сторону и площадь (51).

58. Площадь равнобедреннаго $\triangle$-а $s=140,8$, а уголъ при основаніи $\alpha=46°18'$. Рѣшить $\triangle$ (20).

59. Основаніе равнобедреннаго $\triangle$-а $b=14,6$, а уголъ при вершинѣ $\alpha=48°16'20''$ Найти радіусъ вписаннаго круга.

60. Высота равнобедреннаго $\triangle$-а $h=12,4$ м, а уголъ при основаніи $\alpha=40°30'$. Найти радіусъ круга описаннаго (5).

61. Діагонали прямоугольника содержатъ по $a=20,5$ м.; уголъ между ними $\alpha=36°40'26''$. Найти площадь (7).

62. Уголъ ромба $A=76°16'$, меньшая діагональ $\partial=10,5$ м. Найти сторону и площадь (55).

63. Сторона ромба $a=241$ м., высота $h=120$ м. Найти углы.

64. Площадь ромба $s=24,36$, уголъ $\alpha=36°30'40''$. Найти діагонали и периметръ (58).

65. Высота косоугольнаго $\triangle$-а $h=8,32$ дѣлитъ уголъ на части $m=20°35'$ и $n=47°18'26''$. Найти площадь и периметръ.

66 Углы при основаніи $\triangle$-а содержатъ $35°48'$ и $70°8'40''$. Высота изъ вершины третьяго угла дѣлитъ противолежащую сторону на части, изъ которыхъ меньшая $a=2,3$ м. Найти площадь.

67. Высота $\triangle$-а $h=67$ м, углы при основаніи содержатъ $m=58°48'$ и $n=68°16'20''$. Найти площадь.

68. Величины гипотенузы и катетовъ треугольника образуютъ геометрическую прогрессію. Найти углы его.

69. Величины сторонъ прямоугольнаго треугольника образуютъ

ариѳметическую прогрессію. Найти углы.

70. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, равенъ $h=8{,}12$ м., уголъ $m=28°32'$. Опредѣлить стороны.

71. Опредѣлить углы и стороны равнобедреннаго треугольника, зная, что высота его, опущенная на основаніе, равна $h=3{,}5$ м., а одна изъ двухъ другихъ $H=5$ м.

72. Проекціи катетовъ на гипотезу равны $a=2{,}7$ м. и $b=6{,}5$ м. Найти углы.

73. Гипотенуза равна $a=46{,}5$ м., а уголъ $m=72°8'$. Найти проекціи катетовъ на гипотенузу.

74. Высота $\triangle$-а содержитъ $h=8$ м. и дѣлитъ основаніе на части $a=5$ м. и $b=4$ м Найти углы и стороны.

75. Углы при основаніи $\triangle$-а равны $m=50°20'$ и $n=46°8'16''$, а высота, опущенная изъ вершины третьяго угла, равна $h=16{,}7$ м. Рѣшить треугольникъ.

76. Опредѣлить объемъ и поверхность прямого конуса, образующая котораго $a=16$ м. составляетъ съ основаніемъ уголъ въ $\alpha=46°18'$ (4).

77. Прямоугольный $\triangle$ равновеликъ квадрату, построенному на одномъ изъ катетовъ. Найти углы.

78. Разстояніе отъ вершины прямого угла до гипотенузы равно $a=12$ м., а уголъ $\alpha=53°7'48''$. Найти площадь.

79. Опредѣлить площадь равнобедренной трапеціи, большее основаніе которой и бокъ содержатъ по a м., а острый уголъ α.

80. Опредѣлить высоту конуса, боковая поверхность котораго s, а уголъ образующей съ основаніемъ α.

81. Боковая поверхность прямого конуса равна $S=325$, а площадь основанія $F=204$. Опредѣлить уголъ между образующей и осью.

82. Основанія равнобедренной трапеціи равны $a=40$ м. и $b=64$ м., а уголъ $\alpha=71°4''31''$. Найти площадь (5).

83. Радіусы основаній усѣченнаго конуса равны $r=20$ м. и $R=$ $=48$ м., образующая наклонена къ основанію подъ угломъ въ $\alpha=142°8'$. Найти объемъ (5).

84. Двѣ окружности, радіусы которыхъ $r=24{,}5$ и $R=35{,}5$ соприкасаются. Найти уголъ между общими касательными, проведенными изъ точки, лежащей на линіи центровъ.

85. Сумма катетовъ $s=23$, уголъ $\alpha=28°4'21''$. Рѣшить треугольникъ.

86. Сумма гипотенузы и катета $s=18$ м., уголъ между ними $\alpha=$ $=67°22'48''$. Рѣшить $\triangle$.

87. Стороны вписаннаго угла равны $a=8$ м. и $b=15$ м., а радіусъ круга $r=11$ м. Найти уголъ.

88. Сумма катета съ его проекціей на гипотенузу равна $s=36$ м., уголъ между ними $\alpha=36°52'12''$. Найти стороны.

89. Разность между гипотенузой и катетомъ $d=49$ м., противолежащій уголъ $\alpha=39°57'58''$. Рѣшить треугольникъ.

90. Рѣшить $\triangle$, зная уголъ его $\alpha=71°49'10''$ и разность катетовъ $\partial=309$.

91. Рѣшить $\triangle$, зная гипотенузу $a=157$ м. и разность катетовъ $\partial=47$ м.

92. Рѣшить $\triangle$, зная гипотенузу $a=865$ и сумму катетовъ $s=1207$.

93. Разность діагоналей ромба $\partial=46$ м, его периметръ $p=260$ м. Рѣшить ромбъ (91).

94. Опредѣлить площадь круга, зная, что уголъ между двумя его діаметрами равенъ $a=36°12'$, а разность хордъ, соединяющихъ концы одного съ концомъ другого, $\partial=15,7$.

95. Сумма катетовъ $s=103$ м., радіусъ описаннаго круга $R=35,5$ м., Рѣшить $\triangle$ (94).

96 Уголъ четырехугольника, вписаннаго въ окружность, равенъ 90°, стороны его заключающія, содержатъ $a=28$ и $b=45$, сумма остальныхъ сторонъ $s=89$. Найти углы и стороны.

97. Уголъ между діагоналями прямоугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса $R=10$, содержитъ 73°44'23". Найти стороны (7).

98. Найти углы равнобедренной трапеціи по основаніямъ $a=$ $=13,45$ м., $b=28,3$ м. и высотѣ $h=11$ м.

99. Площадь робма $s=1386$ кв. м. периметръ $p=340$ м. Найти углы (19).

100 Опредѣлить площадь ромба по углу его α и радіусу r круга въ него вписаннаго.

101. Опредѣлить площадь сегмента, соотвѣтствующаго сторонѣ правильнаго 20-угольника, вписаннаго въ кругъ, радіусъ котораго $r=7,6$.

102. Опредѣлить площадь сегмента, соотвѣтствующаго дугѣ равной радіусу, если площадь соотвѣтствующаго сектора $s=32$.

103. Периметръ равнобедреннаго $\triangle$-а равенъ $p=15,8$, уголъ при вершинѣ $\alpha=32°8'14''$. Рѣшить $\triangle$.

104. Хорда дѣлитъ окружность радіуса $R=25,4$ м. на части въ отношеніи 2 : 7. Какъ велики части, на которыя эта хорда дѣлитъ перпендикулярный къ ней діаметръ?

105. Какъ велики части, на которыя раздѣлился кругъ радіуса $R=11,284$ м. хордою $a=6,9728$ м.?

106. Сторона правильнаго вписаннаго многоугольника равна $a=$ $=60,8$ м., а сторона вписаннаго же многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ равна $b=40,4$ м. Найти радіусъ круга.

107. Катетъ $a=75,9$ м. прилежащій уголъ раздѣленъ прямою на части $\alpha=28°16'$ и $\beta=15°8'40''$. Какъ велики части на которыя эта прямая раздѣлила противолежащій катетъ?

108. Изъ мѣста, находящагося въ разстояніи $a=25$ саж. отъ колокольни, вершина креста видна подъ угломъ $m=50°$, а основаніе его подъ угломъ $n=48°$ къ горизонту. Найти высоту креста.

109. Силы въ 28,3 ф. и 70,84, приложенныя къ концамъ рычага (прямолинейнаго) длиною въ 7 м. подъ углами въ 28°30' и 50°32', уравновѣшиваютъ одна другую. Найти точку опоры.

110. Дуга $m=70°20'12''$, взятая въ окружности, радіусъ которой $r=$ $=17,8$ м., вращается около діаметра, проходящаго чрезъ одинъ изъ концовъ ея. Вычислить объемъ сферическаго сектора.

111. **Въ прямой конусъ, ось котораго съ образующей составляютъ уголъ въ 26°14'18", вложенъ шаръ радіуса $r=1$ м., касающійся конуса по окружности круга, величину которой требуется опредѣлить.**

112. Вычислить объемъ конуса, зная, что боковая поверхность его, развернутая на плоскость, представляетъ круговой секторъ съ угломъ въ $\alpha=112°30'$ и радіусомъ $r=19$ м.

113. Катетъ $\triangle$-а равенъ $a=17{,}6$ м.; прилежащій уголъ $m=$ $=37°8'20''$. На сколько увеличится этотъ уголъ при увеличеніи противолежащаго катета на $b=20$ м.?

114. По катету $a=36{,}48$ и противолежащему углу$=54°18'20''$ опредѣлить отрѣзки гипотенузы, образованные перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ средины другого катета.

115. Гипотенуза $a=58$ м., синусъ одного изъ угловъ $m={}^{21}/_{29}$. Рѣшить $\triangle$.

116. Площадь прямоугольнаго $\triangle$-а $s=16{,}75$, уголъ $a=28°36'5''$. Найти объемъ тѣла, полученнаго вращеніемъ $\triangle$-а около большаго катета.

117. Гипотенуза $a=384{,}68$ м., тангенсъ угла $m=0{,}74$. Найти радіусъ вписаннаго круга.

118. Опредѣлить разстояніе точки отъ окружности, зная, что касательныя проведенныя изъ нея, равны $a=15$ м., и образуютъ между собою уголъ $\alpha=78°46'$.

119. Вершина горы Мауна-Лоа на одномъ изъ Сандвичевыхъ острововъ скрывается за горизонтомъ для путешественника, отплывшаго $m=2°33'$ отъ нея. Найти высоту горы.

120. Опредѣлить углы трапеціи, зная, что ея бока $a=30{,}8$ м. и $b=58{,}75$ м. взаимно перпендикулярны.

121. Опредѣлить разстояніе между центрами двухъ равныхъ окружностей радіуса $r=1{,}57$ м., зная, что ихъ общая касательная съ линіей центровъ составляетъ уголъ $\alpha=37°18'40''$.

122. Одна изъ равныхъ высотъ равнобедреннаго треугольника дѣлитъ противолежащій бокъ на части въ отношеніи $m:n=$ $=5:8$. Опредѣлить углы.

123. Опредѣлить углы ромба, зная, что высота его, проходящая чрезъ точку пересѣченія діагоналей, дѣлитъ сторону на части въ отношеніи $m:n=3:5$ (72).

124. Опредѣлить углы прямоугольнаго треугольника, зная, что его гипотенуза больше биссектора остраго угла въ k разъ.

125. Изъ точки A, находящейся въ разстояніи $AB=a=72$ м. отъ стѣны, концы этой послѣдней видны подъ углами $\alpha=30°20'$ и $\beta=35°40'$ къ AB. Опредѣлить длину стѣны.

126. Сторона квадрата раздѣлена на части, изъ которыхъ одна въ четыре раза длиннѣе другой. Подъ какими углами изъ точки дѣленія видны стороны его.

127. По основанію треугольника a, прилежащему углу α и высотѣ h опредѣлить другой прилежащій уголъ и противолежащую этому углу сторону.

128. Рѣшить треугольникъ по сторонѣ $a=3{,}7$ м., противолежащему углу $\alpha=100°20'$ и высотѣ $h=2$ м., опущенной на сторону этого угла.

129. Стороны прямоугольника равны $a=7$ м. и $b=3{,}1$ м. Опредѣлить площадь и углы ромба, сторонами котораго служатъ прямыя, соединяющія средины сторонъ прямоугольника.

130. Рѣшить треугольникъ по гипотенузѣ a и биссектору b остраго угла.

131. Опредѣлить объемъ и полную поверхность конуса, описаннаго около шара радіуса $R=0,347$ м., зная, что образующая составляетъ съ основаніемъ уголъ $\alpha=70°15'46''$.

132. Изъ точки, находящейся въ разстояніи $AC=a=1,27$ м. отъ окружности, проведена сѣкущая ACD и касательная AB подъ угломъ $\alpha=37°28'16''$ къ ней. Найти BC и BD.

Зависимость между сторонами и углами косоугольнаго треугольника.

§ 58. Теорема. Стороны треугольника пропорціональны синусамъ противолежащихъ угловъ.

Данъ $\triangle BAC$. Проведемъ высоту BD, которая можетъ лежать:

1. *внутри треугольника* (фиг. 23). Въ такомъ случаѣ прямоугольные треугольники ABD и CBD дадутъ по § 53:

$$BD=AB\sin A=c\sin A, \text{ и}$$

$$BD=BC\sin C=a\sin C, \text{ слѣд.,}$$

$$c\sin A=a\sin C, \text{ откуда,}$$

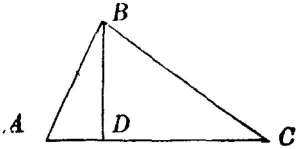
$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Проведя высоту изъ C, докажемъ, что

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \quad \ldots\ldots (2)$$

поэтому

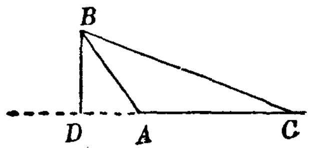
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \ldots (3)$$



Фиг. 23.

2. *внѣ треугольника* (фиг. 24). Въ такомъ случаѣ прямоугольные $\triangle\triangle$ ABD и CBD дадутъ: $BD=AB\sin BAD=c\sin(180°-A)=$ $=c\sin A$; $BD=BC\sin C=a\sin C$, слѣд., $c\sin A=a\sin C$, откуда

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$



Фиг. 24.

Проведя высоту изъ C, докажемъ, что $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$; а потому какъ и въ первомъ случаѣ, имѣемъ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Замѣчаніе. Равенства (3) вмѣстѣ съ равенствомъ $A+B+$ $+C=180^\circ$ представляютъ три уравненія, а потому достаточны для опредѣленія по тремъ даннымъ элементамъ треугольника трехъ неизвѣстныхъ. Изъ этихъ **трехъ основныхъ независимыхъ уравненій** вытекаютъ всѣ другія соотношенія между сторонами и углами треугольника. Покажемъ нѣкоторыя изъ нихъ (§§ 59, 60, 61, 62).

§ 59. Теорема. Сумма двухъ сторонъ треугольника такъ относится къ ихъ разности, какъ тангенсъ полусуммы противолежащихъ угловъ къ тангенсу ихъ полуразности.

Изъ основного уравненія (3) въ § 58

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \text{ имѣемъ}$$

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{b}{\sin B} \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{\sin A-\sin B}=\frac{b}{\sin B},$$

поэтому
$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a-b}{\sin A-\sin B} \quad \text{или}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B} \quad \text{или, по § 38,}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,(A+B)}{\operatorname{tg} {}^1\!/_2\,(A-B)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

§ 60. Теорема. Сумма (или разность) двухъ сторонъ треугольника такъ относится къ третьей, какъ косинусъ (или синусъ) полуразности противолежащихъ имъ угловъ относится къ синусу (или косинусу) половины угла, противолежащаго третьей сторонѣ.

Изъ основного уравненія (3) въ § 58 имѣемъ

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{b}{\sin B}, \text{ но } \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}, \text{ слѣд.}$$

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \text{или} \quad \frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C},$$

откуда, по рав. (1) § 37 и рав. (1) § 35, имѣемъ

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2\sin {}^1/_2(A+B)\cos {}^1/_2(A-B)}{2\sin {}^1/_2 C\cos {}^1/_2 C},$$

но такъ какъ

$$\sin {}^1/_2(A+B)=\sin {}^1/_2(180^\circ-C)=\sin(90^\circ-{}^1/_2 C)=\cos {}^1/_2 C,$$

то, по сокращеніи, будемъ имѣть

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos {}^1/_2(A-B)}{\sin {}^1/_2 C}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1)$$

Подобно предыдущему найдемъ:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}\quad\text{или}$$

$$=\frac{2\sin {}^1/_2(A-B)\cos {}^1/_2(A+B)}{2\sin {}^1/_2 C\cos {}^1/_2 C},\ \text{но}$$

$\cos {}^1/_2(A+B)=\cos {}^1/_2(180^\circ-C)=\cos(90^\circ-{}^1/_2 C)=\sin {}^1/_2 C$, слѣд.,

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin {}^1/_2(A-B)}{\cos {}^1/_2 C}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2)$$

§ 61. Теорема. Квадратъ стороны треугольника равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія ихъ на косинусъ угла, лежащаго между ними.

Данный $\triangle ABC$ можетъ быть остроугольнымъ или тупоугольнымъ. Разсмотримъ оба случая.

1. *Уголъ A—острый* фиг. (19). Изъ геометріи*) извѣстно, что

$$a^2=b^2+c^2-2b\,AD,$$

но $\triangle ABD$ даетъ: $AD=c\cos A$, слѣд.,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

2. *Уголъ A—тупой* (фиг. 20). Изъ геометріи извѣстно, что

$$a^2=b^2+c^2+2b\,.\,AD,$$

но изъ треугольника ABD имѣемъ

$$AD=AB\cos BAD=c\cos(180^\circ-A)=-c\cos A,\ \text{слѣд.,}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1)$$

Итакъ, теорема справедлива для всякаго треугольника. Три фор-

*) Для упрощенія доказательства ссылаемся на теорему геометріи (см. дальше § 63 и замѣч. къ § 58).

мулы найденныя въ геометріи для квадрата стороны треугольника ($\angle A$—острый, прямой, тупой), сливаются въ одну тригонеметрическую.

Также точно можно показать, что

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

§ 62. Слѣдствія. Мы знаемъ, что

$$\sin {}^1/_2 A=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

но рав. (1) § 61 даетъ

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\text{, а потому}$$

$$1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}=\frac{2\ (p-b)(p-c)}{bc},$$

гдѣ $a+b+c=2p$, поэтому

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Точно также найдемъ, что

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad \text{и} \quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\text{*)}$$

При помощи преобразованій, подобныхъ предыдущимъ, найдемъ, что

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \text{и} \quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

---

*) Т.-е. синусъ половины угла треугольника равенъ квадратному корню изъ дроби, числитель которой есть произведеніе разностей между полупериметромъ и каждой изъ сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ, а знаменатель—произведеніе тѣхъ-же сторонъ.

Дѣля $\sin\frac{A}{2}$ на $\cos\frac{A}{2}$, найдемъ .

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (3)$$

§ 63. Покажемъ, что соотношенія § 61 представляютъ слѣдствія трехъ основныхъ равенствъ §-а 58

Въ самомъ дѣлѣ, $A+B=180^\circ-C$, а потому

$$\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C) \text{ или}$$

$$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin C\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Полагая въ рав. (3) § 58

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k, \text{ откуда,}$$

$$\sin A=\frac{a}{k},\ \sin B=\frac{b}{k},\ \sin C=\frac{c}{k},$$

мы равенству (1) дадимъ видъ

$$\frac{a\cos B}{k}+\frac{b\cos A}{k}=\frac{c}{k} \text{ или}$$

$$a\cos B+b\cos A=c\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Точно такъ же найдемъ (или круговой замѣной)

$$b\cos C+c\cos B=a\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3)$$

$$c\cos A+a\cos C=b\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (4)$$

Умножая равенства (2), (3) и (4) соотвѣтственно на c, a и b и вычитая первое изъ полученныхъ равенствъ изъ суммы двухъ другихъ, найдемъ что

$$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2, \text{ откуда}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Площадь треугольника.

§ 64. Теорема. Площадь треугольника равна половинѣ произведенія двухъ сторонъ и синуса угла, лежащаго между ними.

Обозначимъ площадь даннаго треугольника ABC (фиг. 19 и 20) чрезъ S. Имѣемъ

$$S={}^1/_2\,AC\,.\,BD,$$

но $BD=BC\sin C$, слѣд.,

$$S={}^1/_2\,AC\,.\,BC\,.\,\sin C={}^1/_2\,ab\sin C\;\ldots\ldots\ldots\;(1)$$

Примѣчаніе. Такимъ образомъ, къ тремъ основнымъ уравненіямъ § 58 присоединяется четвертое. Всѣ остальныя выраженія площади треугольника чрезъ его стороны суть слѣдствія этихъ четырехъ уравненій. Разъ навсегда замѣтимъ, что къ основнымъ уравненіямъ намъ придется еще (§ 65) прибавить столько новыхъ. сколько новыхъ величинъ пожелаемъ ввести въ вычисленіе.

Слѣдствія. 1) Подставляя въ рав. (1) выраженіе для b, найденное изъ рав. (2) § 58, имѣемъ

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2)$$

2) Подставляя въ рав. (1) $2\sin{}^1/_2\,C\cos{}^1/_2\,C$ вмѣсто $\sin C$ получимъ:

$$S=ab\sin{}^1/_2\,C\cos{}^1/_2\,C,$$

а подставляя въ это равенство значенія $\sin{}^1/_2\,C$ и $\cos{}^1/_2\,C$ изъ рав. (1) и (2) § 62, получимъ:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(3)$$

Задачи. Показать, что въ треугольникѣ ABC

1. $\sin A+\sin B=2\cos{}^1/_2(A-B)\cos{}^1/_2\,C.$
2*. $\sin A-\sin B=2\sin{}^1/_2(A-B)\sin{}^1/_2\,C.$
3. $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B=\dfrac{\sin C}{\cos A\cos B}.$ 4*. $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B=\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}.$
5*. $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B=\dfrac{c}{b\sin A}.$ 6*. $\operatorname{tg}B=\dfrac{b\sin A}{c-b\cos A}=\dfrac{b\sin C}{a-b\cos C}.$
7. $\sin{}^1/_2A\sin{}^1/_2B\sin{}^1/_2C=\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.$

8. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos{}^1/_2 A \cos{}^1/_2 B \cos{}^1/_2 C$.

9. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin{}^1/_2 A \sin{}^1/_2 B \sin{}^1/_2 C$.

10. $\sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{A}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

11. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

12*. $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C = 1$.

13. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$.

14. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A \cos B \cos C + 1 = 0$.

15. $\sin A - \sin B + \sin C = 4\sin{}^1/_2 A \cos{}^1/_2 B \sin{}^1/_2 C$.

16. $\operatorname{ctg}{}^1/_2 A + \operatorname{ctg}{}^1/_2 B + \operatorname{ctg}{}^1/_2 C = \operatorname{ctg}{}^1/_2 A \operatorname{ctg}{}^1/_2 B \operatorname{ctg}{}^1/_2 C$.

17. $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a}{h}$, гдѣ h—высота, опущенная на a.

18. $S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$. 19. $\cos{}^1/_2 A \cos{}^1/_2 B \cos{}^1/_2 C = \frac{ps}{abc}$.

20. Вывести равенства § 61 изъ равенствъ § 60.

21. Доказать рав. § 63 на основанiи рав. (2) § 55.

22. Вывести рав. § 63 изъ рав. § 61.

23. Доказать на основанiи рав. (3) § 58, что △△ подобны, если стороны одного a, b, c, другого na, nb, nc.

24. Доказать, что равнодѣлящая угла △-а разсѣкаетъ противолежащую сторону на части, обратно пропорцiональныя синусамъ прилежащихъ угловъ.

Пользуясь рав. (1) § 64, показать, что площадь

25. параллелограмма (и трапецiи) равна половинѣ произведенiя дiагоналей на синусъ угла между ними;

26. квадрата равна половинѣ квадрата его дiагонали;

27. всякаго 4-угольника равна половинѣ произведенiя дiагоналей на синусъ угла между ними.

28. параллелограмма (и ромба) равна произведенiю двухъ смежныхъ сторонъ на синусъ угла между ними.

29. Показать, что площадь треугольника равна $^1/_2\, bh \sin\alpha$, гдѣ h—прямая, проведенная изъ вершины подъ угломъ α къ основанiю b. Случаи, когда h сливается: 1) со стороною, 2) съ высотою.

Основные случаи рѣшенiя косоугольныхъ треугольниковъ.

§ 65. Для рѣшенiя косоугольнаго треугольника, какъ извѣстно изъ геометрiи, необходимо и достаточно имѣть три элемента (въ числѣ ихъ должна быть, по крайней мѣрѣ, одна сторона):

1) три стороны,

2) сторону и два угла

3) двѣ стороны и уголъ (лежащій между ними или противолежащій большей изъ нихъ).

1-й случай. Даны a, b, c.

Углы опредѣляемъ по формуламъ (3), а не (1) или (2) § 62 потому, что 1) по тангенсу уголъ опредѣляется точнѣе, чѣмъ по синусу или косинусу (§ 51), и 2) приходится вычислять всего только 4 логариѳма.

2-й случай. Даны a и углы B и C.

Стороны опредѣляемъ изъ рав. (1) и (2) § 58, а площадь изъ рав. (2) § 64.

3-й случай. Даны, a, b и $\angle C$.

Для опредѣленія A и B поступаемъ такъ:
Изъ равенства $A+B+C=180^\circ$ находимъ

$$\frac{A+B}{2}=90^\circ-{}^1/_2\,C$$

зная $^1/_2\,(A+B)$, изъ рав. (1) § 59 найдемъ $^1/_2\,(A-B)$.
Теперь легко опредѣлить A и B, такъ какъ

$$A=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2},$$

$$B=\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}.$$

Сторону c опредѣляемъ изъ рав. (1) § 58 въ томъ случаѣ если надо вычислять и площадь, потому что для опредѣленія площади по формулѣ (1) § 64, кромѣ найденныхъ, придется отыскать только $\lg b$; если площадь опредѣлять не надо, то пользуемся и рав. (1) или (2) § 60.

4-й случай Даны a, b и A.
B опредѣляется изъ рав. (3) § 58, откуда

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}.$$

Уголъ C опредѣляемъ изъ рав. $A+B+C=180^\circ$, а сторону c

изъ рав. (3) § 58, которое даетъ

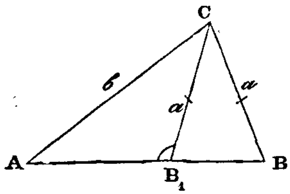
$$c=\frac{b\sin C}{\sin B}.$$

Изслѣдованіе. Уголъ B опредѣляется по синусу, слѣд., задача возможна тогда, когда (§ 17).

$$\sin B \text{ т.-е. } \frac{b\sin A}{a} \text{ или}=1, \text{ или } <1.$$

Первому условію удовлетворяетъ прямой уголъ; второму—одинаково острый B и тупой $180°—B$, потому что (§ 21) $\sin B=$ $=\sin(180°—B)$; первый изъ нихъ находимъ непосредственно изъ таблицъ, второй—вычитаніемъ найденнаго изъ 180°. Оба эти рѣшенія имѣютъ мѣсто, какъ сейчасъ увидимъ, въ томъ только случаѣ, если данный уголъ A лежитъ противъ меньшей изъ данныхъ сторонъ. Разсмотримъ три возможныхъ случая.

I. Если $a<b$, то и $A<B$ (извѣстно изъ геометріи), слѣд., B можетъ быть и острымъ и тупымъ, такъ какъ въ обоихъ случаяхъ A (всегда острый) *) будетъ $<B$, и потому вопросу одинаково удовлетворяютъ два треугольника: 1) остроугольный ACB съ (фиг. 25) углами B и C и стороной c и 2) тупоугольный ACB съ углами



Фиг. 25.

$$B'=180°—B,\ C'=180°—(A+B') \text{ и}$$

стороной

$$c'=\frac{b\sin C'}{\sin B'}.$$

II. Если $a>b$, то и $A>B$. Эта зависимость показываетъ, что B долженъ быть непремѣнно острымъ, такъ какъ иначе A, какъ большій, и подавно былъ бы тупымъ, а двухъ тупыхъ угловъ въ $\triangle$-ѣ можетъ быть. Итакъ, вопросу удовлетворяетъ одинъ треугольникъ съ острымъ угломъ B.

III. Если $a=b$, то и $A=B$, слѣд., A и B—острые. Вопросъ допускаетъ одно рѣшеніе.

---

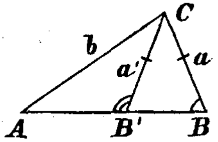
*) Если-бы A былъ тупымъ то B, какъ большій, и подавно былъ бы тупымъ, а двухъ тупыхъ въ $\triangle$-ѣ быть не можетъ.

§ 66. Образецъ вычисленій.

Косоугольный треугольникъ. 4-й случай.

Данныя.

$a=12,3$
$b=20,8$
$A=32°8'26''$



Фиг. 26.

Искомыя.

$B=64°6'30''$	$B'=115°53'30''$
$C=83°45'4''$	$C'=31°58'4''$
$c=22,983$	$c'=12,241$

Формулы: $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$, $C=180°-(A+B)$, $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$.

Первое рѣшеніе.

1) Вычисленіе B

$\lg b=1,31806$
$+\ \lg\sin A=\overline{1},72591$ $582+9$
$1,04397$ $\partial=20$
$-\ \lg a=-1,08991$ $20''\ldots 6,7$
$\lg\sin B=\overline{1},95406$ $6''\ldots 2$
$64°6'\ \ldots\ 3$ $26''\ldots 8,7$
$30''\ \ldots\ 3$ $\partial=6$
$B=64°6'30''$

2) Вычисленіе C

$A=32°8'26''$
$B=64°6'30''$
$A+B=96°14'56''$
$180°=179°59'60''$
$C=83°45'\ 4''$

3) Вычисленіе c

$\lg a=1,08991$
$+\ \lg\sin C=\overline{1},99741$
$1,08732$
$-\ \lg\sin A=-\overline{1},72591$
$\lg c=1,36141$
$22,98\ \ldots\ 35$ $\partial=19$
6
$3\ \ldots\ 5,7$
$c=22,983$

Второе рѣшеніе.

1) Вычисленіе B'

$B'=180'-B$
$180°=179°59'60''$
$B=\ 64°\ 6'30''$
$B'=115°53'30''$

2) Вычисленіе C'

$A=\ 32°\ 8'26''$
$B'=115°53'30''$
$A+B'=148°\ 1'56''$
$180°=179°59'60''$
$c'=\ 31°58'\ 4''$

3) Вычисленіе c'

$\lg a=1,08991$
$+\ \lg\sin C'=\overline{1},72382$ $381+1$
$0,81373$ $\partial=20$
$-\ \lg\sin A=-\overline{1},72591$ $4''\ldots 1,33$
$\lg c=1,08782$
$12,24\ \ldots\ 78$ $\partial=36$
4
$1\ \ldots\ 3,6$
$C'=12,241.$

Нѣкоторыя предложенія о треугольникѣ.

§ 67. I. Отношеніе стороны треугольника къ синусу противолежащаго угла равно діаметру описаннаго круга.

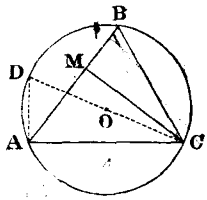
Около $\triangle$ ABC описанъ кругъ O. Проводимъ діаметръ CD. Изъ прямоугольнаго треугольника CDA имѣемъ (фиг. 27).

$AC=2R\sin ADC$, но

$\angle ADC=\angle ABC=\dfrac{\smile AC}{2}$, слѣд.,

$b=2R\sin B$, откуда $\dfrac{b}{\sin B}=2R$, слѣд.,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \quad \ldots\ldots (1)$$



Фиг. 27.

2. Проведемъ высоту $CM=h$. Изъ $\triangle$ BCM имѣемъ

$$h=a\sin B$$

Умножая это равенство на $2R=\dfrac{b}{\sin B}$, имѣемъ

$$2Rh=ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

3. Изъ рав. (1) по свойству равныхъ дробей

$$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R,$$

откуда $\qquad a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$,

или, на основаніи задачи 8-й § 64,

$$a+b+c=8R\cos{}^1\!/_2A\cos{}^1\!/_2B\cos{}^1\!/_2C$$

полагая $\qquad a+b+b=2p$, имѣемъ

$$p=4R\cos{}^1\!/_2A\cos{}^1\!/_2B\cos{}^1\!/_2C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

4. Подставляя въ равенство

$$S=\frac{bc\sin A}{2}$$

выраженія b и c чрезъ $2R$ изъ рав. (1) и сокращая, имѣемъ

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

5. Площадь многоугольника (а, слѣд., и треугольника) равна полупроизведенію периметра на радіусъ круга вписаннаго, т. е. $S=pr$, Подставляя въ это равенство значенія p изъ рав. (3) и S изъ рав. (4), найдемъ

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C = 4\,Rr \cos {}^1/_2 A \cos {}^1/_2 B \cos {}^1/_2 C.$$

Замѣняя $\sin A$ и т. д. чрезъ $2 \sin {}^1/_2 A \cos {}^1/_2 A$ и т. д. (§ 35) и сокращая, получимъ

$$r = 4\,R \sin {}^1/_2 A \sin {}^1/_2 B \sin {}^1/_2 C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

6. Дѣля рав. (5) на рав. (3), получимъ

$$\frac{r}{p} = \operatorname{tg} {}^1/_2 A \operatorname{tg} {}^1/_2 B \operatorname{tg} {}^1/_2 C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

7. Подставляя въ рав. $S=pr$ выраженіе r изъ рав. (6), получимъ

$$S = p^2 \operatorname{tg} {}^1/_2 A \operatorname{tg} {}^1/_2 B \operatorname{tg} {}^1/_2 C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

а подставляя выраженіе p, найдемъ

$$S = r^2 \operatorname{ctg} {}^1/_2 A \operatorname{ctg} {}^1/_2 B \operatorname{ctg} {}^1/_2 C \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

8. Дѣля рав. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ почленно на рав. (3) § 62, получимъ

$$\frac{S}{\operatorname{tg} {}^1/_2 A} = p(p-a)$$

откуда $\quad S = p(p-a) \operatorname{tg} {}^1/_2 A$, или

$$pr = p(p-a) \operatorname{tg} {}^1/_2 A,$$

откуда $\quad r = (p-a) \operatorname{tg} {}^1/_2 A$

такъ же точно $\quad r = (p-b) \operatorname{tg} {}^1/_2 B$

$$\left.\begin{aligned} r &= (p-a) \operatorname{tg} {}^1/_2 A \\ r &= (p-b) \operatorname{tg} {}^1/_2 B \\ r &= (p-c) \operatorname{tg} {}^1/_2 C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

9. Соединивъ центръ O' вписаннаго круга съ B и C и проведя радіусъ въ точку касанія M стороны BC, найдемъ изъ треугольниковъ $BO'M$ и $CO'M$

$$BM = r \operatorname{ctg} {}^1/_2 B, \qquad MC = r \operatorname{ctg} {}^1/_2 C,$$

складывая и упрощая, получимъ

$$a = r(\operatorname{ctg} {}^1/_2 B + \operatorname{ctg} {}^1/_2 C)$$

Приведя къ виду, удобному для логариѳмированія (§ 52, 1), и помня, что $\sin {}^1/_2 (B+C) = \cos {}^1/_2 A$ (см. § 60), получимъ

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{r\cos{}^1/_2 A}{\sin{}^1/_2 B\sin{}^1/_2 C}, \\ \text{такъ же точно} \\ b=\dfrac{r\cos{}^1/_2 B}{\sin{}^1/_2 A\sin{}^1/_2 C},\quad c=\dfrac{r\cos{}^1/_2 C}{\sin{}^1/_2 A\sin{}^1/_2 B}. \end{array}\right\} \quad \ldots (10)$$

Замѣчаніе. Покажемъ, какъ при помощи основного ряда (1) и свойства ряда равныхъ отношеній можно рѣшать различныя тригонометрическія задачи не треугольники.

1) Покажемъ, напр., какъ при помощи равенства (1) связать непосредственно периметръ съ площадью, т. е. непосредственно получить рав. (7), минуя рав. (6). Для этого на основаніи рав. (1) выражаемъ $2R$ чрезъ периметръ, а затѣмъ $2R$ чрезъ площадь и полученныя выраженія сравниваемъ. Имѣемъ

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C} \quad \ldots (11)$$

Затѣмъ изъ рав. (1) получаемъ

$$2R\,.\,2R=\frac{ab}{\sin A\,\sin B},$$

но $S={}^1/_2 ab\sin C$, откуда $ab=\dfrac{2S}{\sin C}$,

слѣд., $$(2R)^2=\frac{2S}{\sin A\,\sin B\,\sin C} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Изъ равенствъ (11) и (12) имѣемъ

$$\left(\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}\right)^2=\frac{2S}{\sin A\,\sin B\,\sin C}.$$

Въ этомъ равенствѣ остается сдѣлать преобразованія знаменателей (см. зад. 8 въ § 64); получимъ

$$S=p^2\operatorname{tg}{}^1/_2 A\operatorname{tg}{}^1/_2 B\operatorname{tg}{}^1/_2 C$$

2) Покажемъ, какъ при помощи рав. (1) связать R съ радіусомъ r круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC, т. е. получить рав. (5). Сдѣлавъ чертежъ и обозначивъ центръ вписаннаго круга чрезъ O, а точку касанія къ AB чрезъ K, имѣемъ

$$OK=AK\operatorname{tg}OAK \quad \text{или}$$

$$r=(p-a)\operatorname{tg}{}^1/_2 A$$

Остается связать R съ $p-a$. Имѣемъ по свойству равныхъ отношеній

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b+c-a}{\sin B + \sin C - \sin A} \quad \text{или}$$

$$2R = \frac{2(p-a)}{\sin B + \sin C - \sin A}$$

Поэтому $$2R = \frac{2r}{\operatorname{tg} {}^1/_2 A (\sin B + \sin C - \sin A)} ,$$

откуда $$2R = \frac{2r}{\operatorname{tg} {}^1/_2 A \ . \ 4 \sin {}^1/_2 B \sin {}^1/_2 C \cos {}^1/_2 A}$$

или $$2R = \frac{r}{2 \sin {}^1/_2 A \sin {}^1/_2 B \sin {}^1/_2 C} .$$

3) Покажемъ, какъ при помощи рав. (1) связать R съ биссекторомъ какого нибудь угла треугольника. Пусть данъ треугольникъ ABC. Проведемъ биссекторъ CD и высоту CK. Извѣстно изъ геометріи, что $\angle KCD = {}^1/_2 (A-B)$.

Поэтому треугольникъ KCB даетъ

$$CK = a \sin B ,$$

а треугольникъ KCD даетъ

$$CK = CD \cos KCD$$

или, полагая $CD = \delta_c$, $\quad CK = \delta_c \cos \dfrac{A-B}{2}$

Сравнивая два выраженія для CK, имѣемъ

$$a \sin B = \delta_c \cos {}^1/_2 (A-B) ,$$

откуда $$a = \frac{\delta_c \cos {}^1/_2 (A-B)}{\sin B} ,$$

а потому

$$2R = \frac{\delta_c \cos {}^1/_2 (A-B)}{\sin A \sin B}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$2R = \frac{\delta_a \cos {}^1/_2 (B-C)}{\sin B \sin C} = \frac{\delta_b \cos {}^1/_2 (A-C)}{\sin A \sin C}$$

4) Чтобы связать, напр., r съ c (рав. 10), достаточно приравнять выраженія $2R$ чрезъ r и чрезъ c. Имѣемъ

$$\frac{r}{2\sin{}^1/_2 A \sin{}^1/_2 B \sin{}^1/_2 C} = \frac{c}{\sin C},$$

откуда
$$c = \frac{r\cos{}^1/_2 C}{\sin{}^1/_2 A \ \sin{}^1/_2 B}$$

Подобнымъ образомъ, т. е. получая выраженія для $2R$ чрезъ данные въ задачѣ элементы и чрезъ искомые, можно путемъ сравненія полученныхъ выраженій установить связь между элементами данными и искомыми.

Задачи. Рѣшить треугольникъ, если

1. $a=99$ м., $b=101$ м, $c=158$ м.
2. $a=20{,}8$, $b=14{,}32$, $C=25°18'$.
3. $a=45$, $b=60$, $\angle C=1^1/_4$.
4. $a=6$, $b=8{,}4$ и $c=4{,}6$.
5. $a=17{,}53$, $b=32{,}51$ и $c=28{,}46$.
6. $a=60{,}5$ м., $B=46°8'$, $C=79°20'$.
7. $a=0{,}83$, $B=50°$, $C=78°20'$.
8. $b=5$, $B=60°20'40''$, $C=38°50'$.
9. $a=50$ м, $b=70$ м, $A=35°$.
10. $a=26{,}8$, $b=32{,}6$, $A=50°40'$.
11. $a=98$, $b=60$, $A=147°$.
12. $a=602{,}1$, $b=405{,}7$, $A=78°16'34''$.
13. $c=6$, $B=0{,}62832$, $A=1{,}0472$.
14. $a=58{,}4$, $b=30{,}6$, $A=112°52'$.
15. $a=18{,}4$, $b=30{,}5$, $C={}^1/_3\pi$.
16. $a=16{,}556$ м., $b=22{,}112$ м, $c=27{,}668$ м.
17. $a=20{,}4$, $b=38{,}6$, $A={}^1/_8\pi$.
18. $A=37°18'$, $B=100°20'$, $a=65{,}08$.
19. $A=50°20''$, $B=115°48'36''$, $a=26{,}35$.
20. $b=17$ м., $c=25{,}3$ м., $B=48°20'50''$.
21. $a=46{,}1$, $b=30{,}7$, $C=28°17'24''$.
22. $a=112$, $b=320$, $c=200$.
23. $a=56$, $b=40$, $C=140°46'20''$.
24. $a=0{,}35$, $b=1{,}4$, $B=125°6'$.
25. $a={}^2/_3$, $c={}^5/_8$, $C=62°8'$.
26. $b=0{,}946$ м., $c=7{,}83$ м. и $A=47°16'36''$.
27. $a=0{,}36$ м., $c=0{,}9$ м., $C=79°8'40''$.
28. $a=9$ м., $b=6{,}5$ и $A=89°30'$.
29. $a=15$ м., $b=10{,}2$ м., $A=1°22'$.
30. $a=4{,}83$ м., $b=7{,}56$ м, $A=24'40''$.
31. $a+b=89$ м., $c=71{,}2$ м., $C=100°19'8''$.
32. $a-b=10{,}2$ м., $c=48$ м., $C=60°20'50''$.

33. $a+b=52{,}3$, $A=70°20'$, $B=46°10'$.
34. $a+b=7{,}5$ м., $A=20°18'$ и $C=70°18'14''$.
35. $a-b=8{,}6$ м., $A=58°30'$, $B=40°28'4''$.
36. $a-b=3^1/_4$ м., $A=57°16'40''$, $C=80°16'42''$.
37. $a+b=s=25$ м, $c=10$ м., $B=64°30'$.
38. $a-b=k=36{,}8$ м., $c=50{,}1$ м, $A=120°39'8''$.
39. $a+b=s=14{,}25$ м., $A-B=50°6'14''$, $C=40°8'26''$.
40. $a-b=k=6$ м., $A-B=14°8'$, $C=60°18'28''$.
41. $ab=k=34{,}6$, $A=48°8'$, $B=112°6'44''$.
42. $a=14{,}5$ м., $b=8{,}6$ м., $A=2B$.
43. $a+b=s=5{,}7$ м., $c=3{,}1$ м., $A=2B$.
44. На катетѣ AC треугольника ABC отложенъ отрѣзокъ $DC=a$. Зная, что $\angle DBC=\alpha$, а $\angle DCB=\beta$, опредѣлить BC и AD.

Сдѣлать вычисленіе, предполагая, что

1) $a=15{,}8$, $\alpha=70°24'$, $\beta=50°18'$.
2) $a=15{,}8$, $\alpha=9°$, $\beta=50°18'$.

45. Высота треугольника $h=8{,}356$ м., уголъ при основаніи $\alpha=72°3'16''$ и сумма другихъ двухъ сторонъ $s=37{,}8$. Рѣшить треугольникъ.
46. Рѣшить треугольникъ, зная его площадь $s=520{,}4$ кв. м. и стороны $a=46{,}5$ м., $b=38{,}72$ м.
47. Сторона треугольника равна $a=8{,}2$ м., уголъ прилежащій $B=49°8'12''$, площадь $s=46{,}5$ кв. м. Рѣшить треугольникъ.
48. Площадь треугольника $s=60$ кв. м., углы его $A=50°6'20''$ и $B=60°20'32''$. Найти стороны.
49. Вычислить площадь и высоты параллелограмма, стороны котораго $a=601$ м. и $b=289$ м., а уголъ $\alpha=79°40'54''$.
50. Опредѣлить площадь и углы параллелограмма, сторона котораго содержитъ $a=386{,}4$ м. и образуетъ съ діагоналями углы $\alpha=46°3'16''$ и $\beta=51°8'12''$.
51. Опредѣлить площадь и углы параллелограмма, діагонали котораго $D=103{,}6$ м., и $\partial=90{,}4$ м пересѣкаются подъ угломъ $\alpha=102°20'$.
52. Сторона параллелограмма $a=70{,}54$ м., діагональ $\partial=98{,}06$ м., уголъ между діагоналями $\alpha=140°3'35''$. Вычислить высоты.
53. Касательная и сѣкущая, длины которыхъ $a=12$ м. и $b=16$ м., пересѣкаются подъ угломъ въ $\alpha=30°20'50''$. Найти длины хордъ, соединяющихъ точку касанія съ точками встрѣчи сѣкущей съ окружностью.
54. Найти стороны и площадь треугольника, периметръ котораго $p=42$ м., а углы $A=67°22'48''$ и $B=59°29'23''$.
55. Уголъ параллелограмма $\alpha=125°40'36''$, противолежащая діагональ $\partial=36{,}5$ м., а периметръ $p=97{,}6$ м. Найти стороны и площадь.
56. Рѣшить треугольникъ по радіусу вписаннаго въ него круга $r=34{,}5$ м. и угламъ $A=82°5'$, $B=44°15'30''$.
57*. Основанія трапеціи равны $a=7$ м. и $b=12{,}5$ м., діагонали образуютъ съ основаніемъ углы $\alpha=37°8'$, и $\beta=42°15'40''$. Вычислить діагонали.
58. Сторона треугольника $a=44$ м., а прилежащіе углы содержатъ

$B=53^\circ 7'48''$ и $C=18^\circ 55'29''$. Найти радіусъ вписаннаго круга.

59. Рѣшить треугольникъ по сторонѣ $a=5$ м., противолежащему углу $A=49^\circ 50'$ и высотѣ $h=7$ м., опущенной изъ его вершины

60. Сумма двухъ сторонъ треугольника равна $s=38{,}04$ м., разность противолежащихъ имъ угловъ $\partial=13^\circ 8'$, третья сторона $a=12$ м. Рѣшить треугольникъ.

61. Разность двухъ сторонъ треугольника $m=7{,}4$ м., разность противолежащихъ угловъ $\alpha=8^\circ 20'$, третья сторона $a=10{,}2$ м. Рѣшить треугольникъ.

62. Двѣ стороны треугольника равны $a=34{,}06$ м., $b=27{,}38$ м., медіана, соотвѣтствующая третьей сторонѣ, $k=19{,}44$ м. Рѣшить треугольникъ.

63. Діагонали параллелограмма $D=100{,}46$ м., и $\partial=86{,}54$ м., разстояніе между меньшими основаніями $h=35{,}78$ м. Рѣшить параллелограммъ.

64. Сторона параллелограмма $a=15$ м., діагональ $d=45$ м., а другая діагональ его составляетъ съ данною стороною уголъ $\alpha=$ $=47^\circ 18'$. Опредѣлить діагональ и площадь.

65. Рѣшить треугольникъ, зная отношеніе двухъ его сторонъ $m=0{,}4$, уголъ между ними $\alpha=47^\circ 2'36''$ и высоту $h=16{,}4$ м., опущенную изъ его вершины.

66. Рѣшить треугольникъ, зная произведеніе двухъ его сторонъ $m=36$, уголъ между ними $\alpha=36^\circ 8'$ и высоту $h=4{,}3$ м., опущенную изъ его вершины.

67. Сторона треугольника равна $a=30$ м., прилежащій уголъ $B=$ $=48^\circ 15'24''$, радіусъ вписаннаго круга $r=18$ м Рѣшить треугольникъ.

68. Рѣшить треугольникъ, зная сумму $s=43$ м. двухъ его сторонъ, тангенсъ $t=-0{,}75$ угла между ними и площадь $a=126$ кв. м.

69. Изъ точки окружности проведены подъ угломъ $\alpha=40^\circ 20'$ двѣ хорды, содержащія $a=28$ м. и $b=19{,}4$ м. Найти площадь круга.

70. Найти радіусъ круга, описаннаго около треугольника, въ которомъ извѣстны сторона $a=38{,}19$ м. и прилежащіе углы $B=42^\circ 12'$ и $C=59^\circ 8'6''$.

71. Рѣшить треугольникъ по двумъ его угламъ $\alpha=59^\circ 40'$ и $\beta=$ $=42^\circ 59'48''$ и радіусу описаннаго около него круга $R=187{,}69$ м.

72. Рѣшить равнобедренную трапецію по меньшему основанію $a=12{,}3$ м., прилежащему углу $\alpha=120^\circ 36'$ и діагонали $\partial=20{,}8$ м.

73. Рѣшить треугольникъ по сторонѣ $a=26{,}8$ м. и высотамъ $H=$ $=20{,}6$ м. и $h=19{,}6$ м., соотвѣтствующимъ двумъ другимъ сторонамъ

74. На берегу рѣки проведена прямая въ $a=25$ м. Изъ концовъ этой прямой подъ углами въ $\alpha=30^\circ 20'$ и $\beta=47^\circ 27'32''$ къ ней виденъ пунктъ, лежащій на противоположномъ берегу. Найти разстояніе этого пункта отъ данной прямой.

75. Наблюдатель, стоящій на берегу рѣки, видитъ подъ угломъ въ $\alpha=36^\circ 45'40''$ дерево на противоположномъ берегу. Отступивъ на $a=23{,}35$ м., онъ видитъ то же дерево подъ угломъ въ $\beta=$ $=30^\circ 29'30''$. Найти высоту дерева и ширину рѣки.

76. Изъ точки A, лежащей на одной горизонтальной плоскости съ основаніемъ башни, вершина башни видна подъ угломъ въ $\alpha=35°9'29''$. Приблизившись на $a=76$ м., къ основанію башни, ея вершину увидимъ подъ угломъ въ $\beta=56°35'$. Найти высоту башни.

77. Чтобы опредѣлить разстояніе между точками A и B, лежащими на противоположныхъ сторонахъ озера, выбрали точку C такъ, что $AC=50$ м., $BC=35$ м. и $\angle ACB=48°20'$. Найти длину AB.

78. Такъ какъ опредѣлить непосредственно разстояніе между пунктами A и B мѣшаетъ лѣсъ, находящійся между ними, то выбрали въ сторонѣ двѣ точки C и D, при чемъ нашли $CD=574$ м., $\angle ACD=78°26'$, $\angle CDA=38°52'$, $\angle BCD=40°15'$ и $\angle BDC=80°36'$. Найти AB.

79. Углы при основаніи треугольника равны $A=70°20'$ и $B=48°16'$; разность проекцій другихъ сторонъ на основаніе равна $a=46$ м. Рѣшить $\triangle$.

80. Наблюдатель, стоящій на берегу озера на высотѣ $a=15$ ф. надъ поверхностью воды, видитъ облако подъ угломъ $\alpha=38°20'$, а его изображеніе подъ угломъ $\beta=42°$ къ горизонту. Найти высоту облака надъ поверхностью воды и разстояніе его отъ наблюдателя.

81. Рѣшить прямоугольный треугольникъ, зная его уголъ $A=30°20'16''$ и биссекторъ $b=28,6$ м. прямого угла.

82. Рѣшить треугольникъ по углу $\alpha=110°25'$, его биссектору $b=3,5$ м. и углу $\beta=78°20'$ этого биссектора со стороною.

83. Стороны треугольника $a=50,6$ м. и $b=78,4$ м., а медіана, соотвѣтствующая большей изъ нихъ, равна $m=60,5$ м. Рѣшить треугольникъ.

84. Окружности, радіусы которыхъ $R=30,4$ м., $r=22,6$ м. и $p=18,5$ м., имѣютъ внѣшнее касаніе. Опредѣлить углы между линіями центровъ.

85. Стороны треугольника относятся какъ $15:14:13$. Найти его углы.

86. Рѣшить треугольникъ по радіусу $R=65$ м. описаннаго около него круга и отношенію сторонъ $m:n:p=15:13:14$.

87. Найти углы треугольника, зная отношеніе его высотъ $a:b:c=3:4:6$. (85).

88. Опредѣлить углы треугольника, зная, что биссекторъ угла C дѣлитъ сторону AB на части AK и KB, а биссекторъ угла B—сторону AC на части AD и DC и что $AK:KB=2:3$, а $AD:DC=5:7$. (85).

89. Основанія трапеціи равны $a=28,35$ м. и $b=70,4$ м., а углы, прилежащіе къ большему, равны $\alpha=30°40'$ и $\beta=53°20'32''$. Рѣшить трапецію.

90. Въ трапеціи $ABCD$ основанія $BC=17,22$ и $AD=32,37$ м., а углы $A=42°30'27''$ и $D=61°29'13''$. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго вращеніемъ трапеціи вокругъ AD.

91. Основанія трапеціи равны $a=38,4$ м., $b=72,5$ м., а бока $c=20$ м. и $d=206$ дцм. Найти діагонали и разстояніе отъ основаній ихъ точки пересѣченія.

92. Уголъ треугольника $\alpha=59°18'44''$, биссекторъ его $b=40$ м., высота, проведенная изъ его вершины, $h=32,6$ м. Рѣшить треугольникъ.

93. Рѣшить треугольникъ по сторонѣ $a=3745$ см., противолежащему углу $A=54°20'34''$ и отношенію $m:n=1^1/_2$ прочихъ сторонъ.

94. На окружности радіуса $R=54,6$ м. отложена дуга $\alpha=97°$. Найти длину хордъ, соединяющихъ концы этой дуги съ нѣкоторой точкой той же окружности, зная ихъ отношеніе $a=0,5$.

95. Опредѣлить площадь равнобедреннаго треугольника ABC, зная, что прямая BD, дѣлящая уголъ B при вершинѣ на части $\alpha=40°34'26''$ и $\beta=13°18'40''$ равна $a=17,1$ м.

96. Въ треугольникѣ ABC даны: сторона $a=21,4$ м. и прилежащіе углы $\alpha=70°14'$ и $\beta=50°18'$. Какъ велики биссекторъ третьяго угла и части, на которыя онъ дѣлитъ треугольникъ.

97. Изъ точки, лежащей въ разстояніи $a=15$ м. отъ окружности радіуса $R=9,17$ м., проведены къ ней подъ угломъ $\alpha=23°16'$ двѣ сѣкущія. Опредѣлить длину ихъ, зная, что одна проходитъ чрезъ центръ.

98. На продолженіи діаметра $\partial=18$ м. круга взята точка въ разстояніи $a=12$ м. отъ центра; чрезъ нее проведена сѣкущая. Найти величину угла, образованнаго ею съ діаметромъ, зная, что онъ вчетверо меньше того, подъ какимъ изъ центра видна внутренняя часть сѣкущей.

99. Изъ точки A проведена сѣкущая ACD чрезъ центръ и касательная AB подъ угломъ $\alpha=50°18'$ къ ней. Опредѣлить длины AB и CB, зная, что равнодѣлящая угла BAD дѣлитъ BD на части, изъ которыхъ меньшая равна $a=2,8$ м.

100. Опредѣлить радіусъ окружности, зная, что сѣкущія, проведенныя къ ней изъ одной точки, содержатъ $a=78$ м. и $b=40,6$ м., составляютъ между собою уголъ $\alpha=58°14'$, и что одна изъ нихъ проходитъ чрезъ центръ.

101. Къ окружности проведены изъ одной точки двѣ сѣкущія, внѣшніе отрѣзки которыхъ равны $a=18$ м., а $b=24, 6$ м. Опредѣлить длину радіуса этой окружности, зная, что сѣкущія составляютъ между собою уголъ $\alpha=42°18'34''$, и что одна изъ нихъ проходитъ чрезъ центръ.

102. Биссекторъ угла $\alpha=68°46'$ прямоугольнаго треугольника дѣлитъ противолежащій катетъ на части, изъ которыхъ большая равна $a=15,7$ м. рѣшить треугольникъ.

103. Вычислить углы треугольника ABC, зная, что $A=60°$, а $b=$ $=c(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

104. Въ треугольникѣ даны разстоянія a и b центра описаннаго круга отъ двухъ сторонъ и третья сторона c. Опредѣлитз радіусъ круга и углы треугольника.

105. Рѣшить треугольникъ, зная отношенія $m:n:k=3:5:7$ его высотъ и радіусъ $R=4$ м. круга около него описаннаго.

106. Опредѣлить углы и площадь параллелограмма, зная, что одна изъ его сторонъ составляетъ $\frac{1}{a}=0,56$, другая—$\frac{1}{b}=1,4$ меньшей діагонали, а большая діагональ $\partial=7,3$ м.

107. Рѣшить трапецію по разности $a=1,5$ м., основаній и разности $b=0,7$ м. боковъ, которые составляютъ между собою уголъ $\alpha=17°18'$.

108. Рѣшить треугольникъ по сторонамъ a=28,4 м. и b=34,8 м. и косинусу m=0,36 угла между ними.

109. Найти радіусы круговъ вписаннаго и описаннаго около треугольника, сторона котораго a=44,879 м., а прилежащіе углы $B=41°53'37''$ и $C=98°33'19''$.

110. Разстояніе между центрами двухъ круговъ ∂=341 м., уголъ между внѣшними касательными $\alpha=20°29'14''$, а между внутренними $\beta=40°32'$. Найти радіусы.

111. Равнобедренный треугольникъ съ угломъ въ $\alpha=37°25'50''$ при вершинѣ, вращаясь около своей высоты, образуетъ тѣло, объемъ котораго V=456 куб. м. Найти поверхность тѣла.

112. Въ треугольникѣ ABC даны: b=117,28 м., a=89,214 м. и $C=69°18'20''$. Найти на AC точку M, зная, что перпендикуляръ, опущенный изъ нея на AB, дѣлитъ треугольникъ пополамъ.

113. Найти углы трапеціи, основанія которой a=80,15 м., b=92,56 м., а бока c=42,44 м. и ∂=62,79 м.

114. Вычислить биссекторы угловъ треугольника, стороны котораго a=17,5 м, b=15,2 м., c=11,6 м., и углы этихъ биссекторовъ со сторонами.

115. Рѣшить треугольникъ по площади S=4056,3 м., углу $A=50°56'56''$ и суммѣ m=204,84 м. сторонъ, его заключающихъ.

116. На горѣ находится башня въ 75 ф высоты. Наблюдатель нашелъ, что прямая, идущая отъ вершины башни къ предмету, лежащему въ долинѣ, составляетъ 46°20′ съ горизонтомъ, а прямая, идущая къ тому же предмету отъ подошвы башни, образуетъ съ горизонтомъ уголъ въ 37°35′. Найти по этимъ даннымъ высоту горы, не сходя съ нея.

117. Наблюдатель, стоящій на прямой, соединяющей двѣ равновысокія заводскія трубы, видитъ ближайшую подъ угломъ въ 60°; отойдя на 80 м. по направленію перпендикулярному къ прямой, соединяющей основанія трубъ, онъ видитъ одну изъ нихъ подъ угломъ въ 45°, а другую въ 30°. Найти высоты и разстояніе трубъ.

118. Пароходъ шелъ по направленію на сѣверъ. Въ нѣкоторый моментъ съ него были усмотрѣны маяки A и B на одной прямой, составляющей 15° къ востоку отъ направленія, по которому шелъ пароходъ, который въ это же мгновенье повернулъ на СЗ; когда онъ прошелъ 5 верстъ, то A былъ виденъ на востокъ, а B на сѣверо-востокъ. Опредѣлить разстояніе между A и B и отъ нихъ до парохода.

119. Прямыя AB=57,4 м. и BC=104,8 м. встрѣчаются подъ угломъ въ 137°54′24″. Черезъ точку A проведенъ къ AB перпендикуляръ; въ какомъ разстояніи отъ A на немъ надо взять точку, изъ которой AB и BC были видны подъ равными углами? Число возможныхъ рѣшеній?

120. Рѣшить предыдущій вопросъ, когда уголъ $ABC=52°6'40''$.

121 Рѣшить треугольникъ по периметру p=48,6 м., радіусу r= =7,1 м. вписаннаго круга и углу $\alpha=118°25'44''$.

122. Рѣшить треугольники по суммѣ $s=36{,}4$ м. двухъ сторонъ, углу $\alpha=108°14'26''$ между ними и радіусу $r=5{,}8$ м. вписаннаго круга.

123. Въ кругъ радіуса $r=7{,}08$ м. вписанъ равнобедренный треугольникъ, въ которомъ отношеніе бока къ основанію равно $m=0{,}6$. Рѣшить треугольникъ.

124. Вычислить площадь треугольника по углу $A=48°32'$, сторонѣ $a=17{,}4$ м. и ея медіанѣ $m=20{,}3$ м.

125. Съ корабля увидѣли два маяка — одинъ на В., другой на СВ; черезъ часъ первый маякъ былъ виденъ на Ю., второй на С; еще черезъ часъ 1-й — на ЮЗ., 2-й — на З. Корабль дѣлалъ 8 миль въ часъ. Найти разстояніе между маяками и разстояніе каждаго изъ нихъ отъ корабля въ томъ моментъ, когда они были замѣчены съ него.

126. Рѣшить треугольникъ по сторонѣ $a=73{,}04$ м., прилежащему углу $B=73°8'26''$ и радіусу $R=41$ м. описаннаго круга.

127. Стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ соотвѣтственно равны $2\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, а $\angle BCA=2x°$ и $\angle ACD=x°$. Найти x и рѣшить параллелограмъ.

128. Рѣшить трапецію по бо̀льшему основанію $b=1700$ м., высотѣ $h=57$ м. и боковымъ сторонамъ $c=543$ м. и $\partial=95$ м.

129. Рѣшить треугольникъ по площади $S=625$ кв. м., углу $\alpha=40°$ и углу $\beta=72°$ между основаніемъ и его медіаной.

130. Въ треугольникѣ ABC даны $a=62$ м., $c=54$ м. и $B=80°$. Перпендикуляръ DH, опущенный на AB изъ средины D стороны AC, продолженъ до встрѣчи въ E съ BC. Рѣшить треугольникъ HEB.

131. Рѣшить треугольникъ ABC, зная $a=2837$ м. $b=2171$ м. и $\cos A=-0{,}02$.

132. Рѣшить треугольникъ ABC по слѣдующимъ даннымъ: $a=3{,}7$ м., $B-C=12°18'$ и $4\cos B=3\cos C$.

133 Основаніе равнобедреннаго треугольника a, уголъ при вершинѣ α. Какъ велики биссекторы его угловъ?

134. Опредѣлить площадь и діагонали четырехугольника, вписаннаго въ окружность радіуса $R=0{,}57$ м., зная, что его вершины дѣлятъ окружность на части въ отношеніи $1:2:3:4$.

135. Рѣшить треугольникъ по медіанѣ $m=1{,}6$ основанія и прилежащимъ къ нему угламъ $A=80°24'$ и $C=60°37'$.

136. Рѣшить треугольникъ по медіанѣ $m=2$ основанія и частямъ $\alpha=37°18'$ и $24°46'$, ни которыя она дѣлитъ уголъ, изъ вершины котораго выходитъ.

137. Рѣшить треугольникъ по его медіанамъ $m_a=2{,}4$ м., $m_b=2{,}7$ м. $m_c=3{,}6$ м. (62).

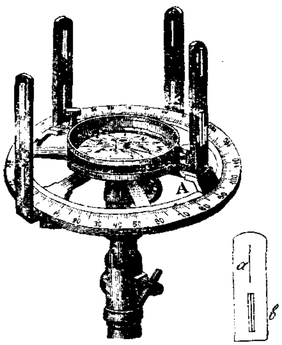
138. Въ круговой секторъ съ дугою $\alpha=48°22'$ и радіусомъ $r=3$ м. вписанъ кругъ. Опредѣлить радіусъ этого круга.

ГЛАВА VI.

§ 68. **Снять планъ мѣстности значитъ сдѣлать изображеніе небольшого участка земли въ какомъ-нибудь масштабѣ, т.-е. такъ, чтобы между всѣми линіями въ планѣ и тѣми, которыя имъ соотвѣтствуютъ на мѣстности, существовало постоянное отношеніе.** *Если мѣстность неровная, то на планъ наносятъ горизонтальную проекцію участка;* для этого выбираютъ на участкѣ какіе-нибудь пункты, опредѣляютъ разстоянія между ними, а затѣмъ берутъ ихъ проекціи. Неровности участка представляютъ **профилями**, т.-е. вертикальными разрѣзами мѣстности по направленію неровностей, или какъ нибудь иначе (подробности можно найти въ руководствахъ по геодезіи).

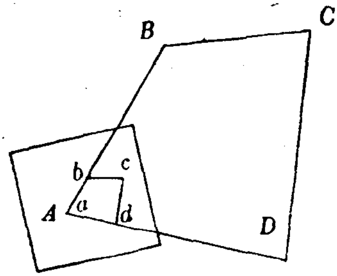
§ 69. Направленіе прямой на мѣстности означается или **провѣшивается** рядомъ прямыхъ кольевъ (**вѣхъ**), вбиваемыхъ въ землю такъ, чтобы они закрывали другъ друга для наблюдателя, стоящаго на этой прямой. Длина провѣшенной прямой измѣряется мѣрной цѣпью, проволокою и пр.

§ 70. Углы измѣряются **астролябіей**. Состоитъ она изъ мѣднаго круга (**лимбъ**), раздѣленнаго на градусы. Около центра лимба вращается линейка A, называемая **алидадой**; она имѣетъ на концѣ *ноніусъ*. На концахъ алидады перпендикулярно къ ней насажены дощечки—**подвижные діоптры**, а на концахъ діаметра лимба, идущаго отъ 0° до 180°, находятся **неподвижные діоптры**. Въ каждомъ діоптрѣ по длинѣ его сдѣланы щель a и прорѣзъ b; вдоль прорѣза натянутъ волосокъ. Діоптры располагаютъ такъ, что щель одного приходится противъ волоска въ прорѣзѣ другого. Установивъ центръ лимба надъ вершиною измѣряемаго угла и направивъ неподвижные діоптры по одной сторонѣ угла, а подвижные по другой, опредѣляютъ его вершину отсчетомъ на лимбѣ. Къ астролябіи присоединяется **бусоль.** **Это—мѣдная круглая коробка, въ центрѣ которой укрѣплена магнитная стрѣлка.** Помощью діоптровъ можно **визировать на предметы,**



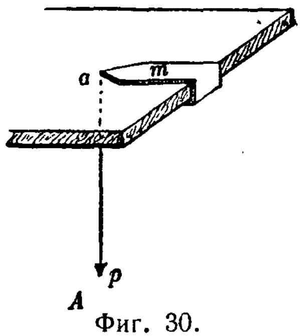
Фиг. 28.

удаленные не болѣе полуверсты; при большихъ разстояніяхъ вмѣсто алидады употребляютъ **кипрегель**; такъ называемая алидада. на которой вмѣсто діоптровъ помѣщена зрительная труба, вращающаяся на горизонтальной оси. Названіе свое астролябія получила потому, что въ старину ею измѣряли высоты свѣтилъ небесныхъ. приводя ея лимбъ въ вертикальное положеніе.



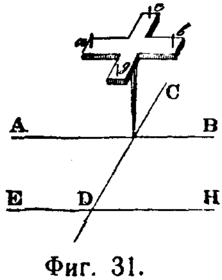
Фиг. 29.

Мензулой наносятъ углы на бумагу, не измѣряя ихъ. Она состоитъ изъ небольшой квадратной (сторона равна $^1/_4$ или $^1/_8$ сажени) деревянной или иной доски, обтянутой бумагой и укрѣпленной помощью винтовъ на штативѣ. Предположимъ, что надо снять фигуру $ABCD$. Ставимъ мензулу надъ A (фиг. 29, 30), проводимъ ее въ горизонтальное положеніе и отмѣчаемъ точку a, лежащую надъ A; помѣстимъ на мензулу алидаду и, направивъ ея діоптры на B, чертимъ по краю алидады прямую ab, которая и представитъ AB въ извѣстномъ масштабѣ, затѣмъ направляемъ алидаду на D и чертимъ прямую ad, изображающую AD въ томъ же масштабѣ; перенося мензулу въ точки B, C и т. д., повторяемъ тѣ же манипуляціи и получаемъ планъ мѣста въ данномъ масштабѣ. При большихъ мензулахъ употребляются кипрегели. Опредѣленіе точки, лежащей надъ вершиною A снимаемого угла, дѣлается помощью вилки m (фиг. 30) съ гирею p на шнурѣ; когда гиря находится надъ A, то остріе верхней вѣтви вилки дастъ горизонтальную проекцію a точки A.



Фиг. 30.

§ 71. Для проведенія на землѣ прямыхъ перпендикулярныхъ и параллельныхъ къ данной употребляетоя **эккеръ**. Въ простѣйшемъ видѣ онъ состоитъ изъ двухъ перпендикулярно сбитыхъ брусковъ, которые на концахъ снабжены шпиньками a, b, c и d (фиг. 31). Крестъ этотъ насаживается на колъ, вбиваемый въ землю. Для проведенія CD перпендикулярно



Фиг. 31.

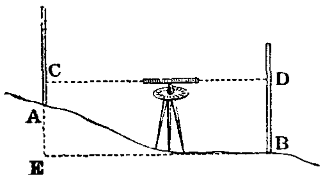
къ AB эккеръ укрѣпляютъ на AB такъ, чтобы направленія ab и AB совпадали, и провѣшиваютъ прямую CD по направленію cd, которая и будетъ, конечно, перпендикулярна къ AB. Для проведенія прямой, параллельной AB, надо провѣшить прямую EH, перпендикулярную къ CD; въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно изъ геометріи, EH будетъ параллельна AB.

§ **72.** Для опредѣленія относительныхъ[1]) высотъ двухъ точекъ, т.-е. высоты одной точки надъ другою, употребляются **нивелиръ и рейки.**

Нивелиръ состоитъ изъ линейки съ діоптрами или зрительной трубы съ прикрѣпленнымъ къ ней уровнемъ для приведенія ея оси въ горизонтальное положеніе; труба устанавливается на треножникѣ.

Рейкою называется шестъ (около 2 саж. длиною), раздѣленный на десятыя и сотыя доли сажени, или на футы и дюймы; дѣленія идутъ снизу вверхъ.

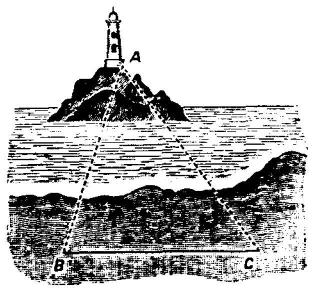
Нивелировку производятъ такъ: установивъ вертикально въ данныхъ точкахъ A и B рейки, а между ними нивелиръ, опредѣляютъ на рейкахъ тѣ дѣленія D и C, которыя лежатъ на продолженіи оси трубы. Разность $DB-AC=EA$ (фиг. 32) и есть относительная высота точки A надъ точкою B. При большихъ разстояніяхъ (около 200 саж.) употребляютъ рейки иного устройства.



Фиг. 32.

§ **73. Задача.** *Опредѣлить разстояніе между точками A и B, изъ которыхъ одна недоступна* (фиг. 33).

Недоступною точкою называется такая точка, къ которой нельзя подойти. Пусть дана недоступная точка A и требуется измѣрить ея разстояніе отъ точки B, къ которой можно подойти. Взявъ прямую BC и измѣривъ ея длину, опредѣляемъ величины угловъ B и C, которые образуетъ прямая BC съ прямыми BA и CA, идущими отъ ея концовъ къ недоступной точкѣ A. Такимъ образомъ въ $\triangle ABC$



Фиг. 33.

[1]) Абсолютной высотой точки наз. ея разстояніе отъ уровня океана.

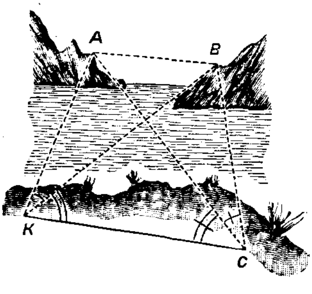
мы знаемъ 3 элемента: сторону $BC=a$ и прилежащіе углы B и C; поэтому отысканіе длины AB сводится на рѣшеніе задачи 2) § 65, имѣемъ

$$\frac{AB}{BC}=\frac{\sin C}{\sin(B+C)},\ \text{откуда}\ AB=\frac{a\sin C}{\sin(B+C)}.$$

Прямая BC, длина которой отыскивается непосредственнымъ измѣреніемъ, называется *базисомъ*.

§ 74. Задача. *Опредѣлить разстояніе между двумя недоступными точками A и B.*

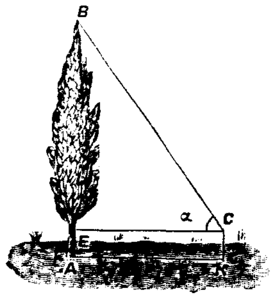
Вообразимъ двѣ недоступныя точки A и B, (верхушки маяковъ) къ которымъ подойти мѣшаетъ, напр., море (фиг. 33).



Фиг. 34.

Проводимъ произвольный базисъ KC, изъ концовъ котораго видны обѣ точки A и B. Измѣряемъ базисъ и углы AKC, BKC, ACK и BCK. Послѣ этого можно приступить къ вычисленію длины прямой AB. Сдѣлаемъ обозначенія: $KC=a$, $\angle AKC=79°$, $\angle BKC=28°$, $\angle ACK=35°$, $\angle BCK=69°$. Въ такомъ случаѣ $\angle AKB=51°$ (если же прямыя KA, KB и KC не лежатъ въ одной плоскости, то $\angle AKB$ надо опредѣлить непосредственнымъ измѣреніемъ, потому что онъ не равенъ разности угловъ AKC и BKC). Изъ $\triangle AKC$ вычисляемъ AK (по сторонѣ KC и угламъ), а изъ $\triangle BKC$ вычисляемъ KB. Наконецъ, изъ $\triangle KAB$ вычисляемъ AB (по двумъ сторонамъ AK и KB и углу между ними).

§ 75. Задача. *Опредѣлить высоту AB предмета (башни, дерева и т. п.), къ основанію котораго можно подойти.*



Фиг. 35.

Отъ основанія A (фиг. 35) предмета беремъ нѣкоторый базисъ AK. Опредѣляемъ длину базиса AK и устанавливаемъ въ K угломѣрный снарядъ. Измѣряемъ этимъ снарядомъ уголъ BCE, составленный съ горизонтомъ лучомъ BC, направленнымъ на вершину предмета. Сдѣлаемъ обозначенія: $AK=a$, $\angle BCE=\alpha$. Въ такомъ случаѣ $EC=a$, а $\triangle ECB$ даетъ

$$BE=EC\,\mathrm{tg}\,\alpha=a\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Для опредѣленія высоты AB предмета остается къ найденной длинѣ BE прибавить длину EA, т. е. высоту h угломѣрнаго снаряда (астролябіи) и получимъ

$$AB = BE + EA \quad \text{или}$$

$$AB = a \operatorname{tg}\alpha + h$$

Замѣчаніе. Отъ неточности угломѣрнаго снаряда зависитъ ошибка въ опредѣленіи длины BE и всей высоты AB. Покажемъ, что ошибка будетъ наименьшая въ томъ случаѣ, когда базисъ AK приблизительно равенъ BE или α близокъ къ 45°.

Допустимъ, что ошибка въ опредѣленіи угла α равна ε и что мы вмѣсто угла α опредѣлили большій уголъ $\alpha+\varepsilon$. Въ такомъ случаѣ высота BE у насъ получится равною не $a\operatorname{tg}\alpha$, но $a\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon)$ и абсолютная ошибка въ опредѣленіи длины BE будетъ равна $a\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon) - a\operatorname{tg}\alpha$ или $a[\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon) - \operatorname{tg}\alpha]$. Далѣе, $a = \frac{BE}{\operatorname{tg}\alpha}$, слѣд., ошибка въ опредѣленіи BE (обозначимъ ее чрезъ k) равна

$$k = a[\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon) - \operatorname{tg}\alpha] = \frac{BE}{\operatorname{tg}\alpha}[\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon) - \operatorname{tg}\alpha] =$$

$$= BE\,\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon) - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = BE\,\frac{\sin\varepsilon}{\cos(\alpha+\varepsilon)\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha} =$$

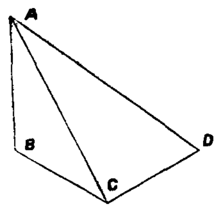
$$= BE\,\frac{\sin\varepsilon}{\cos(\alpha+\varepsilon)\sin\alpha} = BE\,\frac{2\sin\varepsilon}{\sin(2\alpha+\varepsilon) - \sin\varepsilon}.$$

Эта ошибка k при одномъ и томъ же значеніи ε будетъ уменьшаться съ увеличеніемъ знаменателя $\sin(\alpha+\varepsilon) - \sin\varepsilon$ и достигнетъ наименьшей величины при наибольшемъ значеніи $\sin(2\alpha+\varepsilon)$, а наибольшее значеніе $\sin(2\alpha+\varepsilon)$ равно 1, слѣд., k достигнетъ своего minimum'а при $\sin(2\alpha+\varepsilon) = 1$, т. е. при $2\alpha+\varepsilon = 90°$, т. е. тогда, когда приблизительно $2\alpha = 90°$ или $\alpha = 45°$..

Относительной ошибкой называется $\frac{k}{BE}$.

§ 76. Задача. *Опредѣлить высоту недоступнаго предмета (горы и т. п.)*

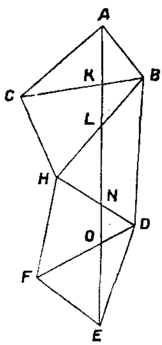
Пусть дано опредѣлить высоту AB (фиг. 36) предмета (горы, церкви, замка и т. п.), къ основанію B котораго подойти нельзя.



Фиг. 36.

Въ горизонтальной плоскости, въ которой лежитъ B, беремъ опредѣленный базисъ CD; измѣряемъ базисъ CD и углы ADC, ACB, ACD. Въ треугольникѣ ACD извѣстны стороны CD и прилежащіе къ ней углы. Вычисляемъ изъ этого треугольника AC. Далѣе, прямоугольный $\triangle$ ABC дастъ $AB = AC \sin BCA$. Задача рѣшена.

§ 77. Тріангуляція. Тріангуляціей (тригонометрической съемкою) называется такая геодезическая операція, при помощи которой опредѣляютъ длины линій на земной поверхности рѣшеніемъ ряда треугольниковъ. Точки A, B, C, D,... (фиг. 37) мѣстности соединяютъ прямыми линіями; получается сѣть треугольниковъ ABC, CBH, HBD и т. д.; одну изъ этихъ прямыхъ, напр., AC измѣряютъ непосредственно и называютъ *начальнымъ базисомъ*. Въ каждомъ треугольникѣ измѣряютъ углы точными инструментами. Точки на земной поверхности выбираютъ такъ, чтобы изъ каждой были видны по меньшей мѣрѣ три другія сосѣднія. Вершинами A, B, C,... треугольниковъ выбираютъ такія точки, какъ вершины колоколенъ или особые знаки на возвышенныхъ мѣстахъ. Рѣшая полученный рядъ треугольниковъ, мы можемъ вычислить длины прямыхъ AB, CB, CH, HB, HD, HF и т. д. Для контроля берется, кромѣ начальнаго базиса, еще другой, напр., FD, который можно непосредственно измѣрить Каждый треугольникъ приходится рѣшать по сторонѣ и двумъ угламъ. Въ треугольникѣ ABC непосредственно измѣрены AC и углы, поэтому можно вычислить CB. Въ треугольникѣ CBH извѣстны CB и измѣренные углы, поэтому можно вычислить HB. Въ $\triangle$-ѣ HBD извѣстно HB и углы измѣренные, поэтому можно вычислить HD и т. д.



Фиг. 37.

Тріангуляціею опредѣляютъ длину дуги меридіана или параллели на земной поверхности. Чтобы дать представленіе о подобномъ измѣреніи, предположимъ, что AE (фиг. 32) есть часть меридіана. Длину значительнаго отрѣзка AE невозможно получить непосредственнымъ измѣреніемъ, углы же сравнительно легко измѣрить при помощи точныхъ инструментовъ, поэтому при измѣреніи длины какой нибудь части меридіана прибѣгаютъ къ измѣренію угловъ и къ рѣшенію треугольниковъ. По обѣ стороны AE выбираютъ рядъ точекъ B, C, H, D, F, которыя принимаютъ за вершины треугольниковъ ACB, CHB, HBD, HDF, FDE; стороны этихъ треугольниковъ пересѣкаютъ линію AE въ точкахъ K, L, N, O. Непосредственно измѣряютъ длину базиса AC и величину угловъ $\triangle$-а ACB, прилежащихъ къ AC. Послѣ этого въ $\triangle$-ѣ ABC можно вычислить всѣ его элементы. Далѣе, изъ концовъ B и C стороны BC треугольника CHB измѣряютъ углы его, прилежащіе къ BC, и послѣ этого вычисляютъ всѣ элементы $\triangle$-а CHB. Затѣмъ, изъ концовъ H и B стороны HB треугольника HBD измѣряютъ углы его, прилежащіе къ HB, и вычисляютъ всѣ его элементы. Такимъ образомъ продолжаютъ измѣрять углы въ каждомъ треугольникѣ и вычислять его стороны, пока дойдутъ до E. Для контроля измѣряютъ непосредственно сторону FE послѣдняго треугольника FED для сравненія съ ея длиною, полученною вычисленіемъ.

Окончивъ первый рядъ вычисленій, приступаютъ ко второму, къ вычисленію отрѣзковъ AK, KL, LN, NO, OE меридіана.

Астрономическими наблюденіями опредѣляютъ $\angle\ CAK$, образуемый стороною AC треугольника CAB съ направленіемъ меридіана. Послѣ этого въ $\triangle$-ѣ ACK по сторонѣ AC и прилежащимъ угламъ опредѣляютъ длину AK.

Длину KL опредѣляютъ изъ треугольника KLB слѣдующимъ образомъ. Изъ $\triangle\ ACK$ можно вычислить CK, а слѣд., и $KB=$ $=CB-CK$ и $\angle\ AKC$. Такимъ образомъ, въ $\triangle$-ѣ KLB извѣстны KB и прилежащіе углы KBL (непосредственно измѣренный) и $\angle\ BKL$, равный углу AKC, вычисленному изъ предыдущаго $\triangle$-а AKC.

Длины LN, NO и OE подобнымъ же образомъ вычислимъ изъ треугольниковъ HLN, NOD и FOE.

Послѣ этого длину AE найдемъ, какъ сумму $AK+KL+$ $+LN+NO+OE$.

ГЛАВА VII.

Рѣшеніе тригонометрическихъ уравненій.

§ 78. Равенство наз. тригонометрическимъ, если въ немъ неизвѣстное содержится подъ знакомъ тригонометрической функціи, напр., $\sin^2x+\cos^2x=1$ и $\sin x+\cos x=1$ суть тригонометрическія равенства.

Тригонометрическія равенства раздѣляются на тождества и уравненія.

Тригонометрическимъ тождествомъ наз. такое тригонометрическое равенство, которое справедливо при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ неизвѣстнаго угла, напр., $\sin^2x+\cos^2x=1$.

Тригонометрическимъ уравненіемъ наз. такое тригонометрическое равенство, которое справедливо только при нѣкоторыхъ значеніяхъ неизвѣстнаго угла; эти значенія наз. корнями уравненія. Если уравненіе содержитъ функціи одного неизвѣстнаго угла, то оно наз. тригонометрическимъ уравненіемъ съ однимъ неизвѣстнымъ, напр., $\sin x+\cos x=1$; если—функціи двухъ угловъ, то—съ двумя неизвѣстными, напр., $\sin x+\sin y=0{,}6$ и т. д.

Рѣшеніе уравненія состоитъ въ отысканіи какой-нибудь функціи неизвѣстнаго угла, а по этой функціи и самаго угла.

Если въ уравненіе входитъ одна тригонометрическая функція искомаго угла, то оно рѣшается обыкновенными пріемами алгебраическими. Рѣшимъ для примѣра уравненіе $\sin^2x=1{,}3-2\sin x$. Переносся всѣ члены въ одну часть уравненія и рѣшая по формулѣ квадратнаго уравненія, имѣемъ

$$\sin x=-1\pm\sqrt{1+1{,}3}=-1\pm\sqrt{2{,}3};$$

$\sqrt{2{,}3}$ нельзя брать со знакомъ—, потому что синусъ есть правильная дробь (§ 17), слѣд., $\sin x=0{,}51$. Если въ уравненіе входятъ 2 или нѣсколько тригонометрическихъ функцій, то его замѣняютъ равносильнымъ, содержащимъ одну функцію. Замѣна эта чаще всего дѣлается: 1) подстановкой вмѣсто одной тригонометрической функціи ея выраженія чрезъ другую на основаніи равенствъ § 8; 2) при помощи равенствъ §§ 35 и 37.

Примѣры. 1. $\cos x+\sec x=4$.

По рав. (3) § 8 имѣемъ

$$\cos x+\frac{1}{\cos x}=4.$$

2. $\cos^2x={}^3/_4+\sin x(\sin x+\cos x)$ . . . . (a)

Раскрывая скобки, имѣемъ

$$\cos^2x={}^3/_4+\sin^2x+\sin x\cos x \quad \text{или}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = {}^3/_4 + \sin x \cos x,$$

или, на основаніи рав. (1) и (2) § 35

$$\cos 2x = {}^3/_4 + {}^1/_2 \sin 2x.$$

Выражая $\cos 2x$ чрезъ $\sin 2x$ или наоборотъ, получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

Уравненіе (a) можно рѣшить, выразивъ $\sin x$ чрезъ $\cos x$ (рав. 1-е § 8) и возвысивъ затѣмъ обѣ части въ квадратъ.

Иногда дѣленіемъ можно данное уравненіе преобразовать въ равносильное, содержащее одинъ тангенсъ или иную функцію.

Примѣры. I. Раскрывая въ уравненіи (a) скобки, замѣняя ${}^3/_4$ черезъ ${}^3/_4(\cos^2 x + \sin^2 x)$ на основаніи рав. 1-го § 8, и дѣля обѣ части на $\cos^2 x$, получимъ

$$1 = {}^3/_4 + {}^3/_4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ig} x.$$

Дальнѣйшій ходъ рѣшенія ясенъ.

2. $x + y = A, \quad a \sin x - b \sin y = 0.$

Подставляя x изъ 1-го уравненія во 2-е, имѣемъ

$$a \sin A \cos y - a \cos A \sin y - b \sin y = 0.$$

Дѣля на $\sin y$, получимъ

$$a \sin A \operatorname{ctg} y - a \cos A - b = 0.$$

Отсюда $\operatorname{ctg} y$ легко опредѣляется.

3. $\sin x \cos y = p, \quad x - y = a.$

Изъ второго уравненія имѣемъ

$$\sin x = \sin(a + y) = \sin a \cos y + \cos a \sin y.$$

Подставляя это значеніе $\sin x$ въ 1-е уравненіе, имѣемъ

$$\sin a \cos^2 y + \cos a \sin y \cos y = p.$$

Замѣняя p черезъ $p(\cos^2 y + \sin^2 y)$ и дѣля обѣ части на $\cos^2 y$, имѣемъ

$$\sin a + \cos a \operatorname{tg} y = p + p \operatorname{tg}^2 y.$$

Отсюда $\operatorname{tg} y$ легко опредѣляется.

Ту же систему можно рѣшить и такъ:

Изъ второго уравненія имѣемъ

$$\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin a \quad \text{или}$$

$$p - \cos x \sin y = \sin a, \quad \text{откуда}$$

$$\cos x \sin y = p - \sin a.$$

Складывая почленно это уравненіе съ первымъ изъ данныхъ, имѣемъ

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = 2p - \sin a$$

или $$\sin(x+y) = 2p - \sin a.$$

Отсюда опредѣлимъ $x+y$; зная же $x+y$ и $x-y$, легко найти x и y.

Если требуется отыскать уголъ, то уравненіе можно рѣшать иногда при помощи вспомогательнаго угла (§ 55).

Дано уравненіе

$$\cos x + p \sin x = q$$

Каково бы ни было p, всегда (§ 17) можно положить $p = \operatorname{tg} y$; поэтому имѣемъ

$$\cos x + \operatorname{tg} y \sin x = q \quad \text{или}$$

$$\cos x + \frac{\sin y}{\cos y} \sin x = q \quad \text{или}$$

$$\frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\cos y} = q \quad \text{или}$$

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos y} = q, \quad \text{откуда опредѣляемъ}$$

$x-y$, а слѣд., и x, опредѣливъ предварительно y изъ уравненія $p = \operatorname{tg} y$.

§ 79. Полезно замѣтить тѣ случаи, когда уравненіе можетъ потерять корни или пріобрѣсти посторонніе (доказательство въ курсахъ алгебры).

I. Уравненіе вообще **пріобрѣтаетъ** посторонніе корни: а) когда мы **умножаемъ** его части на цѣлое выраженіе, содержащее неизвѣстное; пріобрѣтаются тѣ корни, которые обращаютъ множителя въ 0; b) когда мы **возвышаемъ** его части въ квадратъ (вообще въ одну и ту же степень).

Примѣры: I. Дано уравненіе $\sin x + \cos x = 1{,}4$. Перенося

$\cos x$ въ правую часть, возвышая затѣмъ обѣ части въ квадратъ и замѣняя $\sin^2 x$ черезъ $1-\cos^2 x$, рѣшаемъ полученное уравненіе и получаемъ посторонніе корни $\sin x = -{}^3/_5$, $\cos x = -{}^4/_5$.

2. Дано уравненіе

$$\frac{\sin x \operatorname{tg} x}{1-\cos x} = {}^9/_4.$$

Для освобожденія уравненія отъ знаменателей, умножаемъ обѣ части на $4(1-\cos x)$; получаемъ уравненіе $5\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0$, корнями котораго служатъ $\cos x = 1$ и $\cos x = 0{,}8$; первый изъ нихъ не есть корень даннаго уравненія; въ самомъ дѣлѣ, онъ обращаетъ лѣвую часть въ неопредѣленносаь $\frac{0}{0}$, для раскрытія которой замѣнимъ $\operatorname{tg} x$ черезъ $\frac{\sin x}{\cos x}$ и представимъ лѣвую часть уравненія въ видѣ

$$\frac{\sin x \,.\, \sin x}{(1-\cos x)\cos x}, \text{ или } \frac{\sin^2 x}{(1-\cos x)\cos x}, \text{ или } \frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\cos x} = \frac{1+\cos x}{\cos x}.$$

Подставляя сюда 1 вм. $\cos x$, получаемъ 2, а не ${}^9/_4$. Посторонній корень найдемъ, полагая $4(1-\cos x)=0$.

II. Уравненіе вообще **теряетъ** корни, когда мы **дѣлимъ** его части на цѣлое выраженіе, содержащее неизвѣстное; теряются тѣ корни, которые обращаютъ дѣлителя въ 0.

Примѣръ. Дано: $\sin^2 x + 0{,}2\cos^2 x + 2\sin 2x = 1$.

Подставляя $\cos^2 x + \sin^2 x$ вм. 1 (рав. 1, § 8) и дѣля обѣ части на $\cos^2 x$, мы теряемъ корень $\cos x = 0$.

III. Рѣшая уравненіе вида $ABC \ldots = 0$, гдѣ $A, B, \ldots$ зависятъ отъ неизвѣстнаго, надо помнить, что произведеніе равно нулю, когда по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей$=0$, а остальные—числа конечныя. Въ виду этого, полагая послѣдовательно $A=0$, $B=0$, и т. д., можемъ получить корни, не удовлетворяющіе данному уравненію. Это можетъ быть въ такомъ случаѣ, если одинъ изъ множителей, напр., $A=0$, а другой, напр., B въ то же время равенъ∞. Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе $ABC \ldots$ принимаетъ при этомъ видъ неопредѣленности $0 \,.\, \infty$, а истинное значеніе его можетъ и не равняться нулю.

Примѣръ. Дано: $\sin x = 4\cos x$.

Перенося $4\cos x$ въ лѣвую сторону и беря $\sin x$ за скобки, имѣемъ

$$\sin x\,(1-4\operatorname{ctg} x)=0.$$

Полагаемъ $\sin x=0$ и $1-4\operatorname{ctg} x=0$.

Первый изъ найденныхъ такимъ образомъ корней $\sin x=0$ не удовлетворяетъ уравненію, потому что при $\sin x=0$, второй множитель

$$1-4\operatorname{ctg} x=1-4\ \frac{\cos x}{\sin x}=1-4\ .\ {}^1/_0=\infty.$$

Истинное значеніе произведенія $\sin x\,(1-4\operatorname{ctg} x)$ равно $\sin x-4\cos x$, что при $\sin x=0$ равняется -4, а не 0.

Задачи для повторенія.

1. Найти стороны вписаннаго въ кругъ треугольника, зная, что дуги, имъ соотвѣтствующія, равны 10,5 ф., 11,27 ф. и 9,646 ф.
2. Показать, что отрѣзки, образованные на основаніи треугольника высотою, обратно пропорціональны тангенсамъ прилежащихъ угловъ.
3. Показать, что отношеніе отрѣзковъ гипотенузы, образованныхъ высотой, равно квадрату тангенса одного изъ угловъ.
4. Отношеніе отрѣзковъ гипотенузы, образованныхъ высотою, равно $m=0{,}5625$. Найти углы.
5. Разность катетовъ $\partial=5$ м., разность ихъ проекцій на гипотенузу равна $m=7$ м. Найти углы и площадь.
6. Отношеніе катетовъ $m=0{,}75$, разность проекцій катетовъ на гипотенузу равна $\partial=14$ м. Найти углы и площадь.
7. Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника равенъ $\alpha=50°18'20''$, а бокъ $b=28$ ф. Найти радіусъ описаннаго круга.
8. Опредѣлить объемъ прямой правильной 3-угольной пирамиды, сторона основанія которой $a=16$ м., а уголъ между ребромъ и плоскостью основанія $m=50°40'$.
9. Рѣшить уравненіе $\arcsin x=\arcsin {}^{323}/_{325}-\arcsin {}^4/_5$.
10. Показать, что $\operatorname{arctg} {}^{59}/_{41}=\operatorname{arctg} {}^3/_7+\operatorname{arctg} {}^5/_8$.
11. Показать, что $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} 0{,}6+\operatorname{arctg} 0{,}25$.

11а. Показать, что $\arcsin {}^3/_5+\arcsin {}^4/_5=\frac{\pi}{2}$

11в. Показать, что $\operatorname{arctg} {}^1/_2+\operatorname{arctg} {}^1/_3=\frac{\pi}{4}$.

12. Рѣшить $\arcsin {}^1/_2\sqrt{2}=\operatorname{arctg} 1{,}5-\operatorname{arctg} x$.
13. Рѣшить $\arcsin x=\operatorname{arctg} 1{}^1/_3+\operatorname{arctg} {}^{33}/_{56}$.

14. Подъ какимъ угломъ пересѣкаются діагонали куба?
15. Разность проекцій катетовъ на гипотенузу равна $p=21$ м., уголъ $A=62°50'40''$. Найти катеты.
16. Прямая правильная 3-угольная призма пересѣчена плоскостью, проходящею чрезъ сторону основанія подъ угломъ въ $52°20'36''$ къ нему. Опредѣлить площадь сѣченія, если периметръ основанія $p=36$ ф.
17. Исключить a изъ уравненій $x=p\sin a$, $y=q\cos a$.
18. Исключить a изъ ур. $\sin a+\cos a=p-1$, $\sin a\cos a=q$.
19. Исключить x изъ ур. $a\sin x=\cos^2 x$ и $\sin x\cos x=b$.
20. Площадь прямоугольнаго треугольника $s=60$, а радіусъ вписаннаго круга $r=3$. Найти углы.
21. Кругъ радіусъ котораго $r=15$ м., вписанъ въ прямоугольный треугольникъ съ угломъ $\alpha=41°6'44''$. Найти площадь.
22. Кругъ радіуса котораго $r=22^{10}/_{11}$ м., вписанъ въ равнобедренный треугольникъ съ основаніемъ $a=72$ м. Найти углы.
23. Изъ мѣди (уд. в$=8$) вылита прямая квадратная пирамида вѣсомъ въ 1954 килогр. Найти высоту, зная, что она съ ребромъ составляетъ уголъ въ $35°20'$.
24. Показать, что сумма разстояній сторонъ треугольника отъ центра описаннаго круга равна суммѣ радіусовъ этого круга и круга вписаннаго въ треугольникъ.
25. Найти длину градуса параллели Харькова, широта котораго равна $49°59'19''$ (радіусъ земли 858 г. м.).
26. Рѣшить $\operatorname{arc\,tg} 1^1/_3=2\operatorname{arc\,tg}(x-1)$.
27. Рѣшить $\operatorname{arc\,tg}(x+1)=3\operatorname{arc\,tg}(x-1)$.
28. *Долготы двухъ мѣстъ* $20°16'$ *W и* $25°48'$ *O, а широта обоихъ* (сѣв.) $50°27'$. Найти разстояніе между ними (рад. земли 6000 в.).
29. На хорду въ 5,8 ф. опирается центральный уголъ, равный 1,0472. Найти площадь круга.
30. Найти $\operatorname{sc}x(\operatorname{sc}x-\operatorname{tg}x)$ при $x=90°$.
31. Найти $\dfrac{1-\cos x}{1-\operatorname{sc}x}$ при $x=2\pi$.
32. Радіусы двухъ пересѣкающихся окружностей равны $R=15$ м. и $r=13$ м., а общая хорда $a=24$ м. Найти центральные углы, соотвѣтствующіе хордѣ.
33. Два круга пересѣкаются перпендикулярно; разстояніе центровъ $\partial=17$ м., общая хорда $a=14^2/_{17}$. Найти дуги окружностей, соотвѣтствующія общей хордѣ.
34. Дуги вписанной въ треугольникъ окружности, заключенныя между точками касанія, равны 14,6608 м., 12,5664 м. и 10,472 м. Найти стороны и углы.
35. Рѣшить треугольникъ, зная суммы $s=24$ м. и $s_1=36$ м. каждаго катета съ его проекціей на гипотенузу.
36. Опредѣлить объемъ прямого конуса, зная уголъ $a=40°32'$ между осью и образующею и объемъ $V=37$ куб. м. описаннаго около него шара.
37. Высота маяка надъ уровнемъ моря$=27$ с.; лучъ зрѣнія, направленный съ его вершины на корабль, составляетъ съ горизонтомъ

уголъ въ $4°11'32''$. Опредѣлить разстояніе корабля отъ маяка.

38. Если отношеніе тяжести подъ экваторомъ къ тяжести подъ широтой x равно $\sqrt{1-0{,}006547 \sin^2 x}$, то во сколько разъ тяжесть подъ широтою $83°50'30''$ больше, чѣмъ подъ широтою $45°42'$?

39. Высота дома 15,243 ф., тѣнь его 47,62 арш. Найти высоту солнца.

40. Высота $\triangle$-а $h=24$ ф., углы при основаніи $A=73°44'23''$ и $B=67°22'48''$. Найти радіусъ описаннаго круга.

41. Найти діагонали трапеціи, зная ея основанія $a=12$ м., $b=15$ м. и два противоположныхъ угла $p=59°27'$ и $q=67°22'$.

42. Гномонъ вышиною въ 6 ф. во время лѣтняго солнцестоянія давалъ наименьшую тѣнь въ 1,327 ф., а во время зимняго 10,14 ф. Опредѣлить наклоненіе эклиптики.

43. Найти поверхность правильной n-угольной пирамиды, сторона основанія которой a, а плоскіе углы при вершинѣ m.

44. Наибольшая производящая кругового конуса A, наименьшая a, уголъ между ними p. Найти объемъ.

45. Діаметръ основанія наклоннаго конуса ∂, углы наклоненія наибольшей и наименьшей производящихъ къ основанію a и b. Найти объемъ.

46. Найти объемъ сектора, соотвѣтствующаго центральному углу $a=80°40'$ въ шарѣ радіуса $R=8$ арш.

47. Объемъ правильной n-угольной призмы V, высота H. Найти сторону основанія.

48. Найти объемъ усѣченнаго конуса, радіусы основаній котораго R и r, а наклоненіе производящей къ большому основанію$=a$.

49. Равнодѣйствующая двухъ силъ равна половинѣ одной и составляетъ прямой уголъ съ другою. Найти уголъ между составляющими.

50. Прямолинейный путь молніи былъ виденъ подъ угломъ $a=45°36'10''$; громъ продолжался $t=2^1/_3$ с., между молніей и громомъ прошло $T=17$ сек. Найти длину пути (скорость звука 333 м.).

51. Опредѣлить объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія треугольника около одной изъ сторонъ его угла $A=36°40'$, зная другую сторону $b=60$ м. и площадь $S=125$ кв. м.

52. Рѣшить треугольникъ по сторонѣ a, противолежащему углу α и высотѣ h, опущенной изъ его вершины.

53. Рѣшить треугольникъ по углу $\alpha=35°40'$, высотѣ $h=14$ м., опущенной изъ его вершины, и разности $\partial=22°30''$ двухъ другихъ угловъ.

54. Если синусы угловъ $\triangle$-а составляютъ ариѳметическую прогрессію, то котангенсы половинъ угловъ составляютъ тоже ариѳметическую прогрессію.

55. Рѣшить $\triangle$ по сторонѣ $a=13$ м., высотѣ $h=20$ м., на нее опущенной, и суммѣ $s=30$ м. двухъ другихъ сторонъ.

56. Рѣшить $\triangle$ по основанію $b=15{,}47$ м., высотѣ $h=16{,}984$ м. и разности $\partial=5{,}49$ м. двухъ другихъ сторонъ.

57. Найти периметръ ромба по углу $\alpha=116°45'$ и суммѣ $s=26{,}4$ м. діагоналей.

58. Рѣшить $\triangle$ по высотамъ $h=20{,}4$ м., $h_1=30{,}6$ м. и $h_2=25{,}8$ м.

59. Большее основаніе трапеціи $a=50{,}6$ м., углы при немъ $\alpha=29^\circ33'16$. и $\beta=113^\circ20'40''$, большій бокъ $c=31{,}4$ м. Рѣшить трапецію.

Рѣшить уравненія:

60. $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}23^\circ10'42''+\operatorname{tg}70^\circ15'46''$.

61. $\sin x=\sqrt{2}\sin(x+47^\circ)$.

62. $\cos x=\sqrt{3}(1-\sin x)$.

63. $\sin 2x+\sin 3x=3\sin x$.

63a. $\sin x-\cos x=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

64. $1+\cos 2x=\cos x:\sqrt{1-\cos^2 x}$.

65. $\dfrac{2\sin x}{\operatorname{ctg}x}=\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$.

66. $a(\sin 2x+\sin 4x)=b\cos x$.

67. $a(\cos 4x-\cos 2x)=b\sin x$.

68. $\operatorname{tg}x\pm\operatorname{ctg}x=a$.

69. $a\operatorname{tg}^2x+b=p\operatorname{sc}x$.

70. $a\sin^2x+b\cos^2x=k$.

71. $\sin x=a\sin y$; $\operatorname{tg}x=b\operatorname{tg}y$.

72. $a(\cos x-\sin x)^2=b\cos 2x$.

73. $a(\cos x+\sin x)=b\cos 2x$.

74. $\cos nx+\cos(n-2)x=\cos x$.

75. $\dfrac{\cos x}{3-4\sin^2 x}={}^1/_3$.

76. $8\cos x\sin x=\pi$.

77. $\sin x\cos y={}^{36}/_{65}$ и $\cos x\sin y={}^4/_{13}$.

78. $\sin x\sin y=0{,}576$ и $\cos x\cos y=0{,}224$.

79 $5\sin x-3\cos x=48\operatorname{ctg}x$.

80. $\operatorname{tg}x+\cos x=\operatorname{sc}x$.

81. $\sin x\,.\,\sin 2x\,.\,\sin 3x=0$.

82. $\cos x\,.\,\cos 2x\,.\,\cos 3x=0$.

83. $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$.

84. $\cos x=\cos 2x+1$.

85. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$.

86. $\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x={}^2/_3$.

87. $\operatorname{ctg}x={}^7/_{32}\operatorname{ctg}{}^1/_2x$.

88. $\cos 2x=0{,}2(\cos x-\sin x)$.

89. $\sin x+\sin 2x=\operatorname{tg}x$.

90. $x+y=26^\circ8'$; $\sin x\sin y=0{,}4$.

91. $x-y=12^\circ14'$; $\cos x\cos y=0{,}12$.

92. $x+y=a$, $\sin x\cos y=p$.

93. $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

94. $2-5\sin x=\sqrt{3\cos^2x-0{,}02}$.

95. $1+{}^1/_2\sin 2x=\cos x+\sin x$.

96. $\cos x(1-\cos x)=\sin x-0{,}5\sin 2x$.

97. $3\sin x=4\sin y$, $x+y=72^\circ$.

98. $\cos(x+30^\circ)-\cos(x-45^\circ)=\sin 15^\circ$.

99. $\sin(x+45^\circ)+\sin(x+75^\circ)=\sin 92^\circ$.

Показать, что

100. $\sin 60^\circ(1-\operatorname{tg}15^\circ)=\sin 30^\circ(1+\operatorname{tg}15^\circ)$.

101. $\sin x=\sin(36^\circ+x)-\sin(36^\circ-x)+\sin(72^\circ-x)-\sin(72^\circ+x)$.

102. $\cos x=\sin(54^\circ+x)+\sin(54^\circ-x)-\sin(18+x)+\sin(18^\circ-x)$.

103. $\cos 2a+\cos 4a+\cos 6a=\dfrac{\sin 7a}{2\sin a}-{}^1/_2$.

104. $(1-\cos 4x)(\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x)=2(3+\cos 4x)$.

105. $p-q={}^1/_2\operatorname{ctg}{}^1/_2(a-b)$, если $2p=\dfrac{\sin a}{\cos b-\cos a}$, $2q=\dfrac{\sin b}{\cos a-\cos b}$.

106. $\frac{x}{b} = \sin\left(p + \text{arc}\sin\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{b}\left(\cos p + \sqrt{b^2 - a^2}\sin p\right)$, если

$$\text{arc}\sin\frac{x}{b} - \text{arc}\sin\frac{a}{b} = p.$$

Вычислить

107. $\text{ctg}\sqrt[5]{\sin 0{,}9}$ **108.** $\text{tg}\sqrt{\pi^{-2}}$ **109.** $(\sqrt[16]{0{,}08})^{\cos 0{,}01}$

110. Рѣшить треугольникъ по высотѣ $h=9{,}45$ м., радіусу $R=7{,}23$ м. описаннаго и $r=3{,}16$ вписаннаго круга.

111. Если котангенсы половинъ угловъ $\triangle$-а выражены послѣдовательными цѣлыми числами, то $\triangle$—прямоугольный.

112. Уголъ $\triangle$-а содержитъ $A=72°8'$, высота и медіана, проведенныя изъ его вершины, равны $h=22{,}6$ м. и $m=35{,}8$ м. Рѣшить $\triangle$.

113. Рѣшить $\triangle$ по основанію $b=28{,}6$ м., высотѣ $h=34{,}15$ м. и разности $n=7°8'14''$ угловъ при основаніи.

114. Точка, лежащая внутри треугольника, стороны котораго $a=20$, $b=35{,}05$ и $c=18{,}7$, соединена съ его вершинами; полученные $\triangle\triangle$ равновелики. Опредѣлить разстояніе точки отъ вершинъ.

115. Найти уголъ между діагоналями прямоугольника, зная, что его основаніе равно сторонѣ квадрата, вписаннаго въ кругъ, радіусъ котораго равенъ высотѣ прямоугольника.

116. Вертикальный шестъ въ 0,32 саж. въ полдень весенняго равноденствія даетъ тѣнь въ 1,1234 саж. Найти широту мѣста.

117. Найти площадь правильнаго 17-угольника, вписаннаго въ кругъ $k=23{,}714$ кв. м.

118. Рѣшить треугольникъ по основанію $b=24{,}36$ м. и тангенсамъ $p=0{,}48$ и $q=-1{,}6$ прилежащихъ угловъ.

119. Рѣшить треугольникъ по сторонамъ $a=0{,}17$ м. и $b=1{,}45$ м. и котангенсу $p=-2$ угла между ними.

120 Какова связь между x и y, если $\cos x = \sin y$.

121. Рѣшить четыреугольникъ $ABCD$, если $BD=584{,}6$ м., $\angle DAC = 72°16'$, $\angle BAC = 35°40'28''$, $\angle DCA = 20°48'$ и $\angle BCA = 59°18'34''$.

122. Возможенъ ли прямоугольный треугольникъ, стороны котораго на одну и ту же величину больше прямыхъ $a=1$ м., $b=2$ м., $c=3$ м. Вычислить углы этого треугольника.

123. Къ окружностямъ радіусовъ $R=0{,}05$ и $r=0{,}03$ проведена общая касательная подъ угломъ въ $\alpha=42°$ къ линіи центровъ. Найти разстояніе между линіями центровъ, если касательная 1) внѣшняя и 2) внутренняя.

124. На прямой AB, какъ на основаніи, построены три равнобедренныхъ треугольника. Показать, что сумма угловъ при ихъ вершинахъ равна $2d$, зная, что высоты ихъ равны $^1/_2\ AB$, AB и $1^1/_2\ AB$.

125. Рѣшить треугольникъ по площади $S=13777$ кв. м., углу $A=113°12'10''$ и разности $n=77{,}77$ м. сторонъ его заключающихъ.

126. Рѣшить треугольникъ по сторонѣ $a=17,385$ м. и высотамъ $h=25,4$ м. и $h_1=10,48$ м., соотвѣтствующимъ двумъ другимъ сторонамъ.

127. Рѣшить треугольникъ по высотамъ $h=12,55$ и $H=20,08$ и суммѣ $a=42,419$ сторонъ, на которыя онѣ опущены.

128. Рѣшить треугольникъ по радіусу $R=4,98$ описаннаго круга, произведенію двухъ сторонъ $\partial=44,68$ и разности $k=20°16'48''$ противолежащихъ угловъ.

129. Рѣшить треугольникъ по радіусу $R=3,5$ описаннаго круга, произведенію $\partial=17,45$ двухъ сторонъ и углу $\alpha=80°6'25''$, лежащему противъ одной изъ нихъ.

130. Рѣшить прямоугольный треугольникъ по площади $S=17,1$ и периметру $2p=38$.

131. На какую высоту долженъ подняться аэростатъ для того, чтобы широта сѣверной точки видимаго съ него горизонта была $a°$, а южной $b°$.

132. Съ парохода, идущаго на югъ, замѣтили на В. два маяка. Черезъ часъ одинъ изъ нихъ былъ виденъ на СВ., а другой на ССВ. Найти скорость парохода, зная, что разстояніе между маяками $a=9$ kilom.

133 Рѣшить треугольникъ по радіусу $R=24$ описанной окружности, разности $\partial=15$ двухъ сторонъ и разности $k=8°25'$ противолежащихъ имъ угловъ.

134. Равнобедренная трапеція разсѣчена діагональю на части въ отношеніи 5 къ 4. Вычислить ея стороны, зная діагональ $\partial=23$ и уголъ $\alpha=46°$.

135. Рѣшить треугольникъ ABC по суммѣ $S=22$ м. высотъ AD и HC, $\angle A=15°$ и $\angle B=30°$.

136. Діаметръ круга пересѣкается хордою подъ угломъ $\alpha=60°43'7''$; отрѣзки діаметра равны $a=2$ м. и $b=16$ м. Найти части хорды.

137. Найти углы трапеціи $ABCD$, зная, что діагонали $AC=320$, $BD=316$, бокъ $AB=136$ и большее основаніе $AD=400$.

138. Діагонали трапеціи взаимно перпендикулярны и равны $D=56$ м. и $\partial=42$ м., а меньшій изъ угловъ, черезъ вершины которыхъ проходитъ большая діагональ, равенъ $\alpha=59°29'23''$. Рѣшить трапецію.

139. Вычислить стороны трапеціи, если углы при основаніи ея $\alpha=80°$ и $\beta=47°11'25''$, а діагонали, выходящія изъ вершинъ этихъ угловъ, соотвѣтственно равны $\partial=80$ м. и $D=100$ м.

140. Рѣшить треугольникъ по угламъ $B=80°6'$, $C=47°16'24''$ и высотѣ $h=84$, опущенной изъ вершины 3-го угла. Опредѣлить биссекторы.

141. Въ треугольникѣ ABC даны $a=199$ м., $b=200$ м. и $c=201$ м. Рѣшить треугольникъ ABO, гдѣ O центръ вписаннаго круга.

142. Въ треугольникѣ ABC даны $b=10$ м., $A=58°$, $C=62°$. Рѣшить треугольникъ AOC, гдѣ O—точка встрѣчи медіанъ.

143. Изъ окна перваго этажа, на высотѣ 6 ф. надъ поверхностью земли, высота колокольни измѣрена въ $56°8'$; изъ окна 2-го этажа, находящагося надъ окномъ 1-го этажа на высотѣ 24 ф.,

высота той же колокольни измѣренъ къ 48°20′. Найти высоту колокольни и разстояніе ея отъ дома.

144. Наблюдатель видитъ башню на югѣ подъ угломъ въ 22°. Пройдя 410 ф., ее увидѣли на юго-востокѣ. Найти высоту башни и разстояніе ея отъ наблюдателя, который во все время своего движенія видѣлъ ее подъ угломъ въ 22°.

145. Катетъ и синусъ прилежащаго остраго угла выражаются однимъ числомъ, гипотенуза $a=3,25$ м. Рѣшить треугольникъ.

146. Изъ точки окружности, радіусъ которой $R=8$ м., проведены подъ угломъ $\alpha=64°8'$ хорда и діаметръ. Раздѣлить хорду на двѣ части такъ, чтобы перпендикуляръ, проведенный черезъ точку дѣленія на діаметръ, дѣлился этою точкою пополамъ.

147. На сколько надо увеличить $B=50°20'$, чтобы при той же величинѣ катета $AB=65,4$ м., сторона AC увеличилась на 18 м.

148. Въ точкахъ A и B плоскости возставлены къ ней перпендикуляры; изъ нихъ одинъ вдвое длиннѣе другого; въ плоскости же проведена прямая AC подъ угломъ въ $\alpha=38°$ къ $AB=$ $=a=25$ м. Найти на AC точку, изъ которой перпендикуляры видны подъ равными углами.

149. Найти углы треугольника, зная, что онъ вчетверо меньше описаннаго круга, а одна изъ сторонъ равна діаметру этого круга.

150. Рѣшить треугольникъ BAC, зная, что $A=60°$, а стороны $b=$ $=\sqrt[3]{0,05}$ и $c=\cos^2 123°46'$.

151. Ребра AB и BC пирамиды наклонены къ основанію соотвѣтственно подъ углами α и β. Найти углы BAC и BCA, зная, что $\angle ABC=\gamma$.

152. Въ секторъ круга, уголъ котораго $38°20'$, вписанъ квадратъ такъ, что 2 его вершины лежатъ на дугѣ. Вычислить углы, подъ которыми изъ центра видны стороны этого квадрата.

153. Найти $y:(a+2x)$, зная, что $a+4x=4y$ и $x=y\cos\alpha$.

154. Даны двѣ концетрическія окружности, разность которыхъ a. Опредѣлить периметръ треугольника, основаніемъ котораго служитъ хорда большей, касающаяся меньшей, а вершина противолежащаго угла α лежитъ въ общемъ центрѣ.

Рѣшить уравненія:

155. $\cos x=\cos(90+2x)$.

156. $\sin 5x=\sin 7x$

157. $\operatorname{tg} ax=\operatorname{ctg} bx$.

158. $\cos 2x=1+\sin 2x$.

159. $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)=\operatorname{ctg}(\operatorname{tg} x)$.

160. $\cos 2x=\cos x+\sin x$.

161. $3^{\sin x+\cos x}=4,5$.

162. $^1/_3(4^{\cos x}-10)=2^{\cos x}$.

163. $x=\arcsin\cos x$.

164. $\arcsin x=2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

165. $\sin(\pi\operatorname{tg} x)=\cos(\pi\operatorname{tg} x)$.

166. $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\ldots=1$.

ОТВѢТЫ.

ГЛАВА I.

1. $57^\circ 17' 44''$. **2.** 30°, 120°, $183^\circ 20' 47''$, $91^\circ 43' 11''$.

3. Изъ подобныхъ треуг. BHM и BDC им. $HM : BH = BC : DC$, отк. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$. **4.** $\triangle DBC \backsim \triangle ABE$.

5 Взявъ произвольной длины отрѣзокъ AB, изъ A радіусомъ равнымъ AB описываемъ дугу, въ B къ AB возставляемъ перпендикуляръ, на которомъ откладываемъ отрѣзокъ $DC = \frac{1}{2} AB$, а изъ C проводимъ параллель AB до встрѣчи съ дугою въ D; уголъ DAB—искомый, п. что $\frac{DK}{AB} = \frac{1}{2}$ (K—основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ D на AB).

6. 0,7. **7.** $\cos a = \frac{12}{13}$. **8.** $\sin a = \frac{15}{17}$. **9.** $\sin a = \frac{3}{13}\sqrt{13}$.

10. $\cos x = 0{,}6$. **11.** $\cos x = \frac{5}{13}$. **12.** $\operatorname{tg} x = \frac{8}{15}$. **13** $\sin x = 0{,}6$.

14. $\sin x = 0{,}6$. **15.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. **16.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 1. **17.** $2{,}5\sqrt{3}$.

21. $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$; $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}$. **71.** 0,8; 0,6.

72. $\cos 60^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 0{,}5$. **73.** $\sin x = 0{,}6$.

74. $\sin x = 0$ и $\frac{1}{3}$. **76.** $\cos x = 0{,}5$.

77. $\operatorname{tg} x = 5$ или 2. **78.** $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} a \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 a - \csc a}$.

79. $\cos x = -1 + \sqrt{2}$. **80.** $\sin x = +1$. **81.** $\sin x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

82. $\sin x = 0{,}5$. **83.** $\sin x = 0{,}5$. **84.** $\cos x = \pm\sqrt{0{,}6}$.

85. $\sin x = 0{,}6$ или $-0{,}1$. **86.** $\cos x = 0{,}8$ или 0,6. **87.** $\sin x = 0{,}6$.

91. $\operatorname{tg} x = 1{,}5$. **93.** $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{b}$. **94.** $\operatorname{tg} x = 0{,}74$.

95. $\operatorname{tg} x = 2$. **97.** $\operatorname{tg} x = 1$. **99.** $\cos x = 0{,}5(\sqrt{5} - 1)$.

100. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **101.** $\sin x = 0{,}8$. **105.** $\sin x = 0{,}6$.

108. $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{2}$. **109.** $\cos x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. **111.** $\operatorname{tg} x = 1$ и $1\frac{2}{3}$.

114. $\sin x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5 - 4p})$. **115.** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

116. $\sin = \sqrt{\frac{b}{a}}$. **119.** $\sin x = 0{,}6$.

ГЛАВА II.

1. $\sin(-x) = -0,6$; $\operatorname{tg}(-x) = -0,75$. **2**. 0,8. **3**. $0,5\sqrt{21}$ и $0,2\sqrt{21}$. **4**. $\sin x = 0,6247$. **5**. $-0,96$. **6**. $-0,75$.
7. По § 19 : $\sin(\alpha - 90) = -\sin(90 - \alpha)$, но $\sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$. **13**. $\sin 40°$.
14. $\operatorname{tg} 0,5\pi$. **15**. $\operatorname{cs} 40°$. **16**. $\operatorname{ctg} 20°$. **17**. $\operatorname{cs} 68°$.
18. $-\sin 0,5\pi$. **19**. $\operatorname{tg} 30°20'$. **20**. $\sin 40°$. **21**. $-\cos 65°$.
22. $-\operatorname{tg} {}^1/_4\pi$. **23**. $-\operatorname{ctg} {}^4/_9\pi$. **24**. $-\operatorname{sc} 18°$. **25**. $-\operatorname{tg} 52°$.
26. $\sin 41°20'$. **27**. $-\operatorname{cs} 40°$. **28**. $\operatorname{tg} 0,3\pi$. **29**. $-\sin 0,3\pi$.
30. $\operatorname{tg} 7°$. **31**. $-\operatorname{cs} 80°$. **32**. $-\operatorname{tg} 62°$. **33**. $\cos 30°$.
34. $\cos {}^1/_4\pi$. **35**. $-\sin 80°$. **36**. $-\operatorname{ctg} 15°$. **37**. $\operatorname{sc} 2°$.
38. $\sin 26°$. **39**. $-\operatorname{ctg} 4°$. **40**. $-\cos 10°$. **41**. $\sin 38°$.
42. $\operatorname{ctg} 34°$. **43**. $-\operatorname{tg} 20°$. **44**. $-\cos 10°$. **45**. $-\operatorname{ctg} 20°$.
46. $\operatorname{ctg} {}^1/_4\pi$. **47**. $-\sin 0,2\pi$. **48**. $-\cos 42°$. **49**. $\operatorname{csc} 34°$.
50. $-\operatorname{ctg} 5°$. **51**. $-\sin 10°$. **52**. $-\operatorname{tg} 20°$. **53**. $\operatorname{cs} 32°46'$.
54. $-\operatorname{ctg} 10°14'$. **55**. $-\operatorname{cs} 30°$. **56**. $-\sin 14°$. **57**. $\operatorname{cs} 35°20'$.
58. $\operatorname{tg} 37°$. **59**. $\cos 30°$. **60**. $-\sin 28°$.
61. 160°, 280°, $-200°$,... **62**. $k\pi + {}^1/_6\pi(-1)^k$
63. 150°, 390°, $-210°$,... **64**. 222°, 402°,...
65. $180n + 45$. **66**. $2x = x + k\pi$ т.-е. $x = 0, \pi, ..$
67. 220°, 400°,.. **68**. $k\pi + {}^1/_6\pi$. **69**. $2k\pi \pm 25°$.
70. ${}^1/a\,(2k\pi \pm a)$. **71**. 300°, 420°,... **72**. $1{}^1/_4\pi$, $2{}^1/_4\pi$,...
73. 200°, 380°,... **75**. 156°, 204°,... **76**. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}({}^1/_2\pi - x)$, т.-е. $2x = {}^1/_2\pi - x + k\pi$. **77**. См. зад. 76.
78. $\dfrac{\pi(2k+1) - 2(b+b_1)}{2(a+a_1)}$. **79**. 135°. **80**. $\pm 90°$.

ГЛАВА III.

1. ${}^1/_6(2\sqrt{2} + \sqrt{3})$ **2**. ${}^1/_2\sqrt{3}$. **3**. $-2,4$.
4. $\operatorname{tg} a = {}^1/_3(2 \pm \sqrt{13})$. **5**. $-{}^7/_{25}$; ${}^1/_2(-3 \pm \sqrt{13})$. **7**. $\pm{}^1/_3$ или ± 3.
8. $\sin(a + b + c) = \sin(k + c) = \sin k \operatorname{cs} c + \cos k \sin c = \sin(a + b)\operatorname{cs} c + \operatorname{cs}(a + b)\sin c = \pm{}^1/_3\sqrt{6} - {}^1/_6$. **10**. -2; ${}^{22}/_{19}$.
11. $\dfrac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b \mp 1}{\operatorname{ctg} b \pm \operatorname{ctg} a}$. **13**. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 a - 1}{2\operatorname{ctg} a}$. **14**. $\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}(2a + a)$; см. рав. (5) § 33. **15**. $22°30' = {}^1/_2 . 45°$, слѣд. по § 36, $\sin 22°30' = {}^1/_2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. **16**. $60° = 30° . 2$, слѣд., можно примѣнить рав. § 35; $\sin 15° = {}^1/_4(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.
17. См. зад. 16; $\cos 36° = {}^1/_4(\sqrt{5} + 1)$. **18**. Такъ какъ $75 = 45 + 30$; $48 = 30 + 18$; $12 = 72 - 60$, то можно воспользоваться рав. § 33; $\sin 75° = \sin 45° \operatorname{cs} 30° + \cos 45° \sin 30° = {}^1/_4\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$.
19. $\operatorname{tg} 52°30' = \operatorname{tg}(45° + 7°30')$, слѣд., можно примѣнить рав. (5) § 33.
62. Надо доказать, что $x = 2y$ (гдѣ $\operatorname{ctg} x = {}^3/_4$, а $\operatorname{tg} y = {}^1/_2$) или что $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 2y$. Имѣемъ $\operatorname{ctg} 2y = 1 : \operatorname{tg} 2y = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 y}{2\operatorname{tg} y} = {}^3/_4$. **63**. ${}^{63}/_{65}$.

64. $^{63}/_{65}$ **65.** $\operatorname{tg}x=0$ или $\pm\sqrt{^1/_3}$. **66.** $\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{^1/_3}$.
67. $\operatorname{tg}x=\pm0{,}6$. **68.** $\operatorname{tg}x=(2\pm\sqrt{4\pm3\operatorname{tg}^2\alpha}):3\operatorname{tg}\alpha$.
70. $\operatorname{tg}x=\dfrac{2\sin\alpha}{3+2\cos\alpha}$. **71.** $\sin x={}^1/_2(m\pm\sqrt{3-3m^2})$ **72.** $\operatorname{tg}x={}^1/_2(\sqrt{3}-1)$
73. $\operatorname{tg}x=\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$. **74.** $\sin x={}^1/_8(-1\pm\sqrt{33})$. **75.** 0,7.
76. $\cos x={}^1/_4(5-\sqrt{17})$. **77.** $\cos x={}^1/_{16}(8a+1+\sqrt{16a+33})$.
78. $\cos x={}^1/_{12}(1\pm\sqrt{73})$. **79.** $\sin x=0$. **80.** $\sin x=0{,}6$.
81. $\sin x=\pm1$ или $\pm\sqrt{^1/_2}$. **82.** $\operatorname{tg}x={}^1/_2(-1\pm\sqrt{5})$.
83. $\operatorname{tg}x={}^1/_4(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-14})$. **84.** $^1/_{16}(7\pm\sqrt{17})$.
85. $\sqrt{\dfrac{3-p}{1-3p}}$. **86.** $\operatorname{tg}x=\sqrt{\dfrac{m-\operatorname{tg}^2\alpha}{m\operatorname{tg}^2\alpha-1}}$. **87.** $\operatorname{tg}x=1$ и -2.
88. $\operatorname{tg}x=2-\sqrt{2}$. **89.** $\operatorname{tg}x=\dfrac{p\sin\alpha}{1+p\cos\alpha}$. **90.** ±1.
91. $\operatorname{tg}x=\dfrac{p-1}{p+1}\operatorname{tg}\alpha$. **92.** $\operatorname{tg}x=(\sin\alpha\pm\sqrt{\sin^2\alpha-4p\cos\alpha}):2\cos\alpha$.
93. $\operatorname{tg}x={}^1/_3\sqrt{3}$. **94.** $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$. **95.** $\operatorname{tg}x={}^1/_2p(\cos\alpha\pm$ $\pm\sqrt{1+3\sin^2\alpha})$. **96.** $^4/_9$. **97.** $\operatorname{tg}x=2\pm\sqrt{3}$.
98. $\operatorname{tg}x=(1\pm\sqrt{1-a^2+b^2}):(a+b)$. **99.** $\operatorname{tg}x=1$ и $\frac{a-b}{a+b}$.
100. $\sin{}^1/_2x=0$ и $^1/_3$. **101.** $\sin{}^1/_2x=0$ и $^1/_2ab$. **102.** $\cos x={}^1/_4(p\pm$ $\pm\sqrt{8+p^2})$. **103.** $\sin x=\sqrt{^3/_7}$. **104.** $\sin y=1$; $\sin x=0{,}5$. **105.** $\cos x={}^1/_2(\operatorname{ctg}{}^1/_2\alpha\pm\sqrt{1-2\cos\alpha})$.
106. $\sin x={}^1/_2$ или -1. **107.** $\operatorname{tg}a=\dfrac{b-a\sin p}{\cos p}$. **108.** $\cos x=0{,}6$.
109. $\operatorname{ctg}x=\dfrac{2\sin c-\sin a\cos b}{\sin a\sin b}$. **110.** $^1/_4$.
111. $\operatorname{tg}x=\dfrac{b-\sin\alpha}{\cos\alpha}$. **112.** $\operatorname{tg}x={}^1/_3(\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-3})$.
113. По рав. (3) § 37 замѣнимъ $\cos x+\cos5x$ на $2\cos3x\cos2x$ и возьмемъ $\cos3x$ за скобки, тогда получимъ $\cos3x=0$ и $2\cos2x+$ $+1=0$; $x=30^\circ$ и 60°. **114.** $\operatorname{tg}x={}^1/_9\sqrt{3}$. **115.** См. зад. 113.
116. $\sin x=0$, $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$. **117.** $\operatorname{tg}x={}^3/_4$.
118. $\operatorname{tg}x=1$ и $-{}^1/_4$. **119.** $\sin2x={}^1/_2(5-\sqrt{13})$. **120.** $\operatorname{tg}x=1$.
121. $\sin x=1$. **122.** $\operatorname{tg}x=3\sqrt{3}$. **123.** $\operatorname{tg}x=\dfrac{r-\sin a}{\cos a-b}$.
124. $\cos x=1$ или $-0{,}5$.

ГЛАВА IV.

1. 9,73337. **2.** 9,60931. **3.** 9,84949. **4.** 9,95211.
5. 9,85324. **6.** 9,86970. **7.** 9,49745. **8.** 9,33276.
9. 9,78744. **10.** 9,88639. **11.** 9,97229. **12.** 9,99374.

13. 9,80424.	**14.** —9,80539*).	**15.** —9,33276.	**16.** 9,85843.
17. 9,99292.	**21.** 0,19325.	**22.** 9,90325.	**23.** 9,67448.
24. 0,33287.	**25.** 9,96328.	**26** 0,46367.	**27.** —0,47538.
28. 9,56139.	**29.** 0,00015.	**33.** 9,97214.	**34.** 9,89209.
35. 9,56802.	**36.** 9,76026.	**37.** 9.81619.	**38.** 9,33276.
39. —9,97897.	**40.** 9,99784.	**41.** 0,73370.	**45.** 0,07922.
46. 9,90728.	**47.** 9,54168.	**48.** — 9,46620.	**49.** 9,82702.
50. 0,38742.	**51.** 9,99983.	**53.** 8,29793.	**54.** 8,32541.
55. 8,18648.	**57.** 8,10390.	**61.** 8,28149.	**62.** 25°10′.
63. 48°29′20″	**64.** 72°43′45″.	**65.** 25°12′34″.	**66.** 30°48′40″.
67. 3°43′29″.	**68.** 54°20″.	**69.** 49°18′15″.	**70.** 10°54′58″.
74. 64°50′.	**75.** 25°50′.	**76.** 34°13′.	**77.** 38°45′27″.
78. 25°14′40″.	**79.** 54°59′40″.	**80.** 45°2′15″.	**81.** 77°34′2″.
82. 35°54′48″.	**83.** 71°16′30″.	**86.** 28°59′.	**87.** 79°46′.
88. 64°42′54″.	**89.** 45°24′30″.	**90.** 75°28′36″.	**91.** 21°6′27″.
92. 83°48′55″.	**93.** 5°16′21″.	**94.** 84°49′54″.	**95.** 54°30″.
96. 24°16′35″.	**97.** 30°40′43″.	**98.** 37°35′2″.	**99.** 63°22′50″.
102. 7°36′.	**103.** 53°9′.	**104.** 47°25′10″.	**105.** 6°12′38″.
106. 10°15′27″.	**107.** 81°45′20″.	**108.** 64°42′18″.	**109.** 65°54′20″.
110. —0,64636.	**111.** — 0,16973.	**112.** — 0,95225.	**113.** — 0,93808.
114. 1,1224.	**118.** 3,5073.	**119.** 0,34306.	**120.** 0,91743.
122. 0,94987,	**125** 24,1527.	**126.** 8,436.	**127.** 4,8427.
128. 9,8546.	**129.** 11,707.	**130** 58 908.	**131.** 61,288.
132. 45,66.	**133.** 19,428.	**134.** 11,7486.	**135.** 1,2656.
136. 0,57987.	**137.** 0,995.	**138.** 9,3964.	**139.** 0,8861,
140. 0,37527.	**141.** 16°47′53″.	**142.** 68°26′19″.	**143.** 42°27′30″.
144. 53°40′23″.	**145.** 18°26′6″.	**146.** 23°14′58″.	**147.** 60°56′26″.
148. 74°44′42″.	**149.** 78°31′57″.	**150.** 32°14′15″.	**151.** Невозможна.
152. 78°27′46″.	**153.** 99°37′36″.	**154.** 207°23′14″.	**155.** 146°6′.
156. 156°42′8″.	**157.** 142°16′.	**158.** 126°34′9″.	**159** 0;78°27′48″.
160. 79°17′54″.	**161.** 57°54′7″.	**162.** 31°14′8″.	**163** 85°58′17″.
164. 15°44′35″.	**165.** 39°10′13″.	**166.** 64°56′.	**167.** 9°2′46″.
168. 127°16′18″.	**169.** 150°45′22″.	**170.** 2°35′54″.	**171.** 79°41′37″.
172. 6°44′13″.	**173.** 63°56′22″.	**174.** 20°24′24″.	**175.** 208°5′44″.
176. 111°23′43″.	**177.** 104°48′19″.	**178.** 109°44′.	**179** x=40°12′31″.
180. 36°52′12″.	**181.** 36°52′12″.	**182.** 45°.	**183.** 135°.
184. 41°11′9″.	**185.** 14°13′6″.	**186.** 74°27′28″.	**187.** 45°.
188. 53°7,48″.	**189.** 51°9′48″.	**190.** 49°8′;31°7′39″.	**191.** 45°.
192. 30° и 60°.	**193.** 51°49′38″.	**194.** 52°23′59″.	**196.** 54°11′59″.
197. 5°59′16″.	**198.** 49°36′22″.	**199.** 54°44′8″.	**200.** 38°10′22″.
201. 55°36′38″.	**202.** 24°20′36″.	**203.** 14°38′18″.	**204.** 19°7′47″.
205. 93°1′18″ и 23°32′36″.		**206.** y=16°43′54″.	**207.** 26°26′18″.

208. 23°11′55″. **209.** $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$. **210.** $\dfrac{\sqrt{2}\sin(45-b)}{\cos b}$.

211. $\dfrac{\cos(b-a)}{\cos a\cos b}$. **212.** $\dfrac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}$. **213.** $\dfrac{\sin(a+b)}{\mathrm{cs}\, a\sin b}$.

---

*) Знакъ (—) при логариемѣ показываетъ, что функція имѣетъ отрицательное значеніе.

214. $\frac{b\sqrt{2}\sin(x-45)}{\cos x}$. **215.** $\frac{\sqrt{2}\sin(45+a)}{\sin a}$. **216.** $2\sin^2(45-{}^1/_2a)=$
$=2\cos^2(45+{}^1/_2a)$. **217.** $-2\sin^2 a$. **218.** $2\operatorname{tg}a\sin^2{}^1/_2a$.
219 $2\cos^2(45-{}^1/_2a)$. **220.** $2\sin 15+{}^1/_2\alpha)\cos(15-{}^1/_2\alpha)$.
221. $4\sin(30-{}^1/_2a)\sin(30+{}^1/_2\alpha)$. **222.** $\operatorname{sc}^2 a\cos 2a$ или $2\operatorname{tg}a\operatorname{ctg}2a$.

223. $\sqrt{2}\sin(45+x)$. **224.** $2\sin\left(45+\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(45-\frac{a+b}{2}\right)$.

225. $2\sin{}^1/_2\alpha\sin{}^3/_2\alpha$. **226.** $\sqrt{2}\cos(45-\alpha)$. **227.** $2\cos^2{}^1/_2\alpha$,
228. $1+\operatorname{cs}a=2\operatorname{cs}^2{}^1/_2a$, слѣд., $1+\operatorname{cs}a+\sin a=2\cos^1{}^1/_2a+$
$+2\sin{}^1/_2a\operatorname{cs}{}^1/_2a=2\cos{}^1/_2a(\operatorname{cs}{}^1/_2a+\sin{}^1/_2a)$, а, по зад. 203, $=$
$=2\sqrt{2}\operatorname{cs}{}^1/_2a\operatorname{cs}(45-{}^1/_2a)$. **229.** $2\sqrt{2}\sin{}^1/_2a\cos(45-{}^1/_2a)$.

230. $-\cos 2a$ **231.** $\frac{\sqrt{2}\sin(45-x)}{\cos x}$, гдѣ $\operatorname{tg}x=$
$=1{}^1/_2\cos a$. **232.** $\frac{a\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

233. $\frac{n\cos(x-\varphi)}{\cos\varphi}$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$. **234.** $\cos b\cos(2a+b)$.

235. $\sin^2 a\operatorname{sc}^2\varphi$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\sin\beta:\sin\alpha$. **236.** $\cos^2{}^1/_2a\sqrt{2\operatorname{tg}a}$.
237. $2\sqrt{a}\cos(45-y)$, гдѣ $\operatorname{tg}y=\sqrt{\cos 2x}$, $\operatorname{tg}x=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

238. $a\operatorname{cs}x$, гдѣ $\operatorname{tg}x=\frac{b}{a}$. **239.** $\sqrt[m]{a^n:\operatorname{cs}^2 x}$, гдѣ $\operatorname{tg}^2x=\left(\frac{b}{a}\right)^n$.

240. $a\operatorname{cs}x$, гдѣ $\operatorname{tg}x=\frac{b}{a}\cos A$. **241.** $p\operatorname{cs}a\operatorname{sc}x$, гдѣ $\operatorname{tg}x=\frac{q}{p}a$.

242. Взявъ при a^2+b^2 множителя $\sin^2{}^1/_2m+\cos^2{}^1/_2m$ (т.-е. 1) приводимъ къ зад. 214; $(a-b)\operatorname{cs}{}^1/_2m\operatorname{sc}x$, гдѣ $\operatorname{tg}x=\frac{a+b}{a-b}\operatorname{tg}{}^1/_2m$.

243. $\frac{\sin(a+x)}{\sin a\sin x}$, гдѣ $\operatorname{tg}x=\frac{2}{5\sin a}$. **244.** $\sqrt{\frac{a\sqrt{2}\sin(45-x)}{\cos x}}$, гдѣ
$\operatorname{tg}x=\frac{b\operatorname{cs}m}{a}$. **245.** $\cos A\sqrt{\frac{a\sqrt{2}\sin(45-x)}{\cos x}}$, гдѣ
$\operatorname{tg}x=\frac{b}{a}\operatorname{tg}^2A$. **246.** $b\sin A\operatorname{ctg}x$, гдѣ $\sin x=\frac{b}{a}\cos A$.

247. $a\sqrt{2}\cos(a-45)$, гдѣ $\sin x=\frac{b}{a}\cos A$.

248. $2\sqrt{\operatorname{tg}a}\cos(45-{}^1/_2a)$. **249.** $p\sin a\sin^2 a$, гдѣ $\cos x=\sqrt{q:p\sin a}$.
250. $5\sqrt{2}\sin 40^\circ:\cos^2x$, гдѣ $\operatorname{tg}^2x=0{,}2\sqrt{1{,}5}$.
251. $\sqrt{a}:\cos x\cos y$, гдѣ $\operatorname{tg}^2x=\frac{b}{a}$, а $\operatorname{tg}^2y=\frac{b}{a}\cos x$.

252. $\operatorname{csc}a\sqrt{\cos 2a}$. **253.** $2\cos^2\varphi$, гдѣ $\sin^2\varphi=0{,}5\cos^2 a$.

254 3 sc^2x, гдѣ 3 $tg^2x=4\ tg^2a$. **255**. 2 sc^2x, гдѣ 2 $tg^2x=3\sin^2a$.
256. 6 $\sin^2{}^1/_2x$, если $cs x={}^2/_3\sin^2a$. **257**. 2 $cs2\varphi : cs^2\varphi$, если $2tg^2\varphi=3\sin^2a$.
260. 54°14'41". **261**. Невозможна. **262**. 6°15'27". **263** 57°57'32".
264. Невозможна. **265**. 31°45'9". **266**. 28°2'22". **267**. 48°51'16".
268. 84°18'15". **269**. 16°50'15".

ГЛАВА V.

Прямоугольный треугольникъ.

1. $A=69°20'44''$. **2**. 27°8'50. **3**. 16°15'36".
4. $b=170{,}32$. **5**. $b=20{,}438$. **6**. $b=33{,}425$.
7. 26,172; 49,507. **9**. $c=23{,}795$. **11**. 3,425; 4,4238.
12. $B=36°52'10''$. **13**. 13°44'36". **14**. 59°27'9".
15. 22°37'12". **16**. ${}^1/_2 a\,tg B=340{,}788$. **17**. $\sin x=2p:c$; $x=$ $=31°54'51''$. **18**. 57,49; 36,308, **19** $B=22°37'12''$.
20. 10,531. **21**. $\sin 2x=0{,}96$; $x=33°13'50''$.
22. Катеты $2R\ cs\,\alpha$ и $2R\sin\alpha$. **23**. 69°53'3". **24**. 73°3'32".
25. $2R\sin\frac{90°}{\pi}$. **26**. 50,5. **27**. 32°31'18".
29. 23°49'34". **30**. 56°7'56". **32**. ${}^1/_3\pi h^3 ctg^2\alpha=8377{,}6$.
33. $\sin x={}^3/_7$; 50°45'10". **34**. $\sqrt{b(b+2r)}$; 40°14'56".
35. 43°39'8". **36**. 63°44". **37**. $2R\sin{}^1/_2\alpha$.
38. $2r\sin 20°=3{,}42$. **39**. 57°7'25". **40**. 70°31'19".
41. $2r\sin\alpha$. **42**. $2R\sin\frac{180}{n}$. **43**. 99,165.
45. Кат.$=m\sin(45-{}^1/_2\alpha)$. **46** $a\,cs\,\alpha : cs^1/_2\alpha$; $a\sin\alpha : cs\,(45-{}^1/_2\alpha)$.
47. $2a\sin\alpha$; $a\cos\alpha$; $tg x={}^1/_2\,ctg\alpha$; $x=29°41'58''$.
48 $k^2\sin(45+\alpha):\sin2\alpha$. **49**. ${}^1/_8\,({}^1/_{45}\pi r^2x-a\sqrt{4r^2-a^2})$, гдѣ $\sin\frac{x}{2}=\frac{a}{2r}$.
50. $tg\,{}^1/_2x=\frac{2b}{a}$. **51**. 31°25'4". **52**. 30°30'37".
53. $\cos=\frac{a}{b}$. **54**. 11°25'16". **55**. ${}^1/_4\,b^2 ctg{}^1/_2\alpha=513{,}09$.
56. $h^2:2\sin2\alpha=364{,}94$. **57**. 5,5005; 52,0537; осн $=x$; ${}^1/_2x^2\ tg\,46°18'=140{,}8$. **58**. Осн.$=2\sqrt{S\,ctg\,\alpha}=23{,}199$.
59. ${}^1/_2\,b\,tg(45-{}^1/_4\alpha)=3{,}9686$. **60**. $h:2\sin^2\alpha=14{,}699$.
61. ${}^1/_2a^2\sin\alpha=125{,}497$. **62**. 8,499; ${}^1/_4\,\partial^2\ ctg\,{}^1/_2\alpha$.
63. 29°51'46". **64**. 2; 6,09; 25,44. **65**. $\frac{h^2\sin(m+n)}{2\cos m\cos n}$.
66. $a:cs\beta=6{,}7717$; $a\,tg\beta:\sin\alpha=10{,}888$; $a^2tg\beta\sin(\alpha+\beta):2\sin\alpha\cos\beta=$ $=35{,}448$. **67**. $h^2\sin(m+n):2\sin m\sin n=2724{,}94$.
68 51°49'38". Въ уравненіи выразить всѣ стороны чрезъ одну и триг. функціи остраго угла: гипот. a, катеты b и c; по условію $a:b=b:c$, откуда $b^2=ac$, но $c=a\cos B$, $b=a\sin B$, слѣд., $a^2\sin^2B=a^2\cos B$.
69. 53°7'43"; см. зад. 68. **70**. $h:\sin\alpha$; $h:\cos\alpha$; $2h:\sin2\alpha$.
71. $\cos x=H:2h$. **72**. $tg x=\sqrt{\frac{a}{b}}$; ${}^1/_2(a+b)\sqrt{ab}$; $x=32°48'7''$.
73. $a\cos^2\alpha=4{,}3769$; $a\sin^2\alpha=42{,}122$. **74**. $tg x=\frac{h}{b}$; $tg y=\frac{h}{b}$; $tg z=h(a+b):(h^2-ab)$; $x=63°26'6''$, $y=57°59'40''$, $z=58°34'13''$.

75. $s=h^2\sin(A+B):2\sin A\ \sin B.$ **76.** $2\pi a^2 \mathrm{cs}\,\alpha\ \mathrm{cs}^2\,{}^1/_2\alpha.$

77. $\mathrm{tg}x=2.$ **78.** $\sqrt{S\sin\alpha}.$ **79.** $2a^2\sin\alpha\sin^2{}^1/_2\alpha.$

80. $\sqrt{\frac{S}{\pi}\sin\alpha\ \mathrm{tg}\alpha}.$ **81.** $\sin x=\frac{F}{S};\ x=38°52'48''.$

82. ${}^1/_4(b^2-a^2)\ \mathrm{tg}\alpha=1820.$ **83.** $-{}^1/_3\pi(R^3-r^3)\ \mathrm{tg}\,\alpha.$

84. $\sin{}^1/_2x=(R-r):(R+r);\ \ x=10°23'20''.$

85. Катеты $\frac{s\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin(45+\alpha)}$ и $\frac{s\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sin(45+\alpha)}$; 17.

86. Гип.$=s:2\cos^2{}^1/_2\alpha=13.$ **87.** $80°27'33''$; $27°4''$.

88. $S:\cos^2{}^1/_2\alpha;\ S\ \mathrm{tg}\,{}^1/_2\alpha:\cos\alpha;$ гип.$=S:2\ \mathrm{cs}\alpha\ \mathrm{cs}^2\,{}^1/_2\alpha.$

89. Гип.$=\partial:\sin^2(45-{}^1/_2\alpha)=137.$ **90.** Гип.$=\partial\sqrt{2}:2\sin(\alpha-45)=200.$

91. $57°13'15''$; $\sin x-\cos x=\partial:a.$ **92.** $35°38'16''$; 156.

93. $\sin x=(p^2-\partial^2):p^2;\ \ x=61°1'17''.$

94. $\pi\partial^2:8\sin^2(45-{}^1/_2\alpha)=472{,}866.$ **95.** $41°6'44''$; $s=1320.$

97. 12,002; 16,007. **98.** $53°7'48''$. **100.** $4r^2:\sin\alpha.$

101. 0,00044. **102.** $2S\sin^2 45°\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=5{,}0705.$

103. Бокъ$=p:4\ \mathrm{cs}^2(45-{}^1/_4\alpha)=6{,}187.$ **104.** 5,9423.

105. 2,58 и 397,43. **106.** 30,67. **107.** $a\ \mathrm{tg}\alpha;\ a\sin\beta:\mathrm{cs}\alpha\ \mathrm{cs}(\alpha+\beta).$

108. $a\sin(m-n):\mathrm{cs}m\ \mathrm{cs}n=2{,}0285.$ **109.** Плечо$=4{,}507.$

110. ${}^1/_3\pi r^3\sin^2{}^1/_2m=8821{,}8.$ **111.** $\pi r^2\ \mathrm{cs}^2\alpha=2{,}5276.$

112. $71°47'24''$. **113.** $b\sqrt{2}\ \mathrm{cs}\varphi:2\sin(\varphi+45)$, гдѣ $\mathrm{tg}\varphi=\frac{2a}{b\sin 2\alpha}.$

114. ${}^1/_2a\ \mathrm{cs}a\ \mathrm{ctg}a=7{,}6457.$ **115.** Кат.$=am$; $46°23'50''$.

116. ${}^2/_3\pi s\sqrt{2s\,\mathrm{tg}\alpha}.$ **118.** $2a\sin^2(45-{}^1/_4\alpha):\mathrm{cs}\,{}^1/_2\alpha=7{,}0932.$

119. Данъ катетъ (6000) и прилежащій уголъ ($2°33'$).

120. $\mathrm{tg}x=\mathrm{ctg}\,y=\frac{a}{b};\ x=27°39'58''.$ **121.** $2r:\sin\alpha.$

122. $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{\frac{2m}{m+2n}}.$ **123.** $\mathrm{tg}\,{}^1/_2x=\mathrm{ctg}\,{}^1/_2y=\sqrt{\frac{m}{n}}.$

124. $\mathrm{cs}x=(1+\sqrt{1+8k^2}):4k^2.$ **125** $a\sin(\alpha+\beta):\mathrm{cs}\,\alpha\ \mathrm{cs}\,\beta.$

126. $\mathrm{tg}x=1{}^1/_4;\ \mathrm{tg}y=5;\ \mathrm{tg}z=1{}^1/_{21}$ **127.** $h:\sin\alpha;\ \mathrm{ctg}x=\frac{a}{h}-\mathrm{ctg}\alpha.$

128. $\sin y=\frac{h}{a};\ h:\sin a;\ h\,\mathrm{ctg}\alpha+\sqrt{a^2-h^2}.$ **129.** $\mathrm{tg}x=2ab:(b^2-a^2).$

130. $\cos{}^1/_2x=(b+\sqrt{b^2+8a^2}):4a.$ **135.** x=уголъ медіаны съ основаніемъ; $\mathrm{ctg}x=\frac{\mathrm{sn}(A-C)}{2\mathrm{sn}A\ \mathrm{sn}C}.$ **136.** A и C—углы при основ.; $\mathrm{tg}\,{}^1/_2(A-C)=\mathrm{ctg}\,{}^1/_2(\alpha-\beta)\ \mathrm{tg}^2\,{}^1/_2(\alpha+\beta).$

Къ § 64. 7. Перемножить рав. (1) § 62.

8. $\sin A=\sin(B+C)$, а $\sin B+\sin C$ выразить по рав. (1) § 37; примѣнить форм. 1 § 35; взять общимъ множителемъ $2\sin{}^1/_2(B+C)$ и примѣнить рав. 3 § 37, а $\sin{}^1/_2(B+C)$ по примѣч. § 7 равенъ $\mathrm{cs}\,{}^1/_2A$.

9. $\cos A = -\cos(B+C)$, примѣнить рав. (2) § 35, а $\cos B + \cos C$ выразить по рав. 3 § 38, замѣнить $\sin^2 {}^1/_2 (B+C)$ чрезъ $1 - \cos^2 {}^1/_2 (B+C)$; взять за скобки $2\cos {}^1/_2 (B+C)$, равное $2\sin {}^1/_2 A$ по примѣч. § 7.

10. Выразить cs A и др чрезъ $\sin {}^1/_2 A$ и др. по рав. 3 § 36 и воспользоваться задачей 9.

11. Такъ какъ $A+B+C=180°$, то $\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(B+C)$; примѣнить рав. 5 § 33 и взять $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$ за скобки; въ полученное выраженіе входять множители $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$ и третій равный $-\operatorname{tg}(B+C)$ или $\operatorname{tg} A$.

12. Въ задачѣ 11 выразить $\operatorname{tg} A$ чрезъ $\operatorname{ctg} A$ и др.

13. По § 23 $\sin 2A = -\sin(2B+2C)$; рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ зад. 8.

14. Сравни зад 13. **15**. Сравни зад. 8.

16. Такъ какъ ${}^1/_2 A = 90 - {}^1/_2 (B+C)$, то $\operatorname{ctg} {}^1/_2 A = \operatorname{tg} {}^1/_2 (B+C)$; примѣнить рав. § 33 и затѣмъ выразить тангенсы чрезъ котангенсы; рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ зад 11.

Косоугольный треугольникъ.

1. $37°23'19''$; $104°22'$. **2**. $116°46'24''$. **3**. $B=65°23'24''$.
4. $32°5'22''$; $104°3'$. **5**. $60°54'20''$; $32°33'48''$.
6. $b=53{,}555$. **7**. $b=0{,}8105$. **8**. $b=4{,}4014$.
9. $B=53°$[illegible]$'7''$ или $126°34'53''$. **10**. $B=70°12'$ или $109°48'$.
11. $19°28'41''$. **12**. $B=41°16'56''$. **13**. $b=3{,}5462$.
14. $B=28°52'5''$. **16** $90°11'38''$; $58°3'8''$. **18**. $b=105{,}656$.
19. $c=8{,}4282$. **20**. Невозможна. **21**. $114°21'47''$ и $23{,}984$.
22 Невозможна. **23**. $23°46''$; $16°12'54''$.
24. $A=11°48'9''$. **25**. $A=70°33'20''$ или $109°26'40''$.
26. $C=98°17'32''$. **27**. $77°50'24''$. **28**. $56°39'23''$.
31. $a=28{,}9$; $B=56°8'42''$. **32**. $70°24'44''$; $a=89{,}514$.
33. $c=28{,}2575$. **34**. $c=5{,}2426$. **35**. $c=41{,}71$; $a=36{,}012$.

37. $\operatorname{tg} {}^1/_2 A = \frac{s-c}{s+c} \operatorname{ctg} {}^1/_2 B$; $A=25°30'52''$.

38 $\operatorname{tg} {}^1/_2 B = \frac{c-k}{c+k} \operatorname{tg} {}^1/_2 A$; $B=30°4'14''$.

39. $в=5{,}398$. **40**. $c=42{,}171$. **41**. $b=7{,}0508$.

42. $\operatorname{cs} B = \frac{a}{2b}$; $B=32°32'22''$; $c = \frac{a^2-b^2}{b}$.

43 $\operatorname{cs} B = \frac{s+c}{2s}$; $B=39°28'18''$. **44**. $AD = \frac{a \operatorname{sn}\beta \operatorname{cs}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sn}\alpha}$.

45. Уголъ при основ.$=y$; $\sin y = h : 2s\sin^2 {}^1/_2 x$, гдѣ $\cos x = h : s\sin\alpha$; $y=36°44'11''$. **46**. $c=35°18'52''$; $\sin C = 2s : ab$.

47. $c=14{,}9927$; $C=98°5'4''$. **48**. $c=12{,}9864$.

49. $ab\sin\alpha$, $a\sin\alpha$, $b\sin\alpha$. **50**. $\frac{2a^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)}$. **51**. ${}^1/_2 D\partial \sin\alpha$; $77°59''$.

52. М. выс.$=\partial \sin(\alpha+x)$, гдѣ $\sin x = \partial \sin\alpha : 2a$.

53. $(a+b)\operatorname{sc}\varphi \sin {}^1/_2 \alpha$ и $\frac{b}{a}(a+b)\operatorname{sc}\varphi \sin {}^1/_2 \alpha$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} {}^1/_2 \alpha$.

54. 15, 13 и 14. *1-й способъ* По § 58 : $\frac{a}{\operatorname{sn} A} = \frac{b}{\operatorname{sn} B} = \frac{c}{\operatorname{sn} C}$, а посвойству равныхъ отношеній, каждая изъ этихъ дробей равна $\frac{a+b+c}{\operatorname{sn}A+\operatorname{sn}B+\operatorname{sn}C}$, слѣд., $a=\frac{(a+b+c)\operatorname{sn}A}{\operatorname{sn}A+\operatorname{sn}B+\operatorname{sn}C}$; замѣняя здѣсь знаменателя на осн. задачи 8 § 64, а $\operatorname{sn}A$ на осн. § 35, получимъ $a=\frac{p\operatorname{sn}{}^1/_2 A}{\operatorname{cs}{}^1/_2 B\operatorname{cs}{}^1/_2 C}$, гдѣ $2p=a+b+c$. *2-й способъ*. Данъ $\triangle ABC$; продолживъ въ противоположн. направл. сторону AC, отложимъ $AD=AB$ и $CM=BC$ и соединимъ D и M съ B. Получится $\triangle\ DBM$, въ которомъ извѣстна сторона $DM=a+b+c$ и углы $D={}^1/_2\ A$ и $M={}^1/_2\ C$; рѣшивъ его, найдемъ $DB=$ $=\frac{(a+b+c)\sin{}^1/_2 C}{\sin{}^1/_2(A+C)}$, а изъ равнобедр. $\triangle\ ABD$ имѣемъ $AB=$ $=DB:2\operatorname{cs}{}^1/_2 A$, слѣд., $AB=\frac{p\sin{}^1/_2 C}{\operatorname{cs}{}^1/_2 B\operatorname{cs}{}^1/_2 A}$.

55. 46,63; 67,27. **56**. См. 67 (9); $a=15{,}305$.

57. $\frac{(a+b)\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)}$, $\frac{(a+b)\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)}=13{,}342$.

58. $a\operatorname{sn}{}^1/_2 B\operatorname{sn}{}^1/_2 C:\sin{}^1/_2(B+C)$. **59**. Изъ ур. (1) и (2) § 67 имѣемъ: $bc=\frac{ah}{\operatorname{sn}A}$, но $a^2=b^2+c^2-2bc\operatorname{cs}A$ или $a^2=b^2+c^2-$ $-2ah\operatorname{ctg}A$; зная bc и b^2+c^2, найдемъ $(b+c)^2$ и $(b-c)^2$, а слѣд. $b+c$ и $b-c$. **60**. 78°18'11"; 36°31'38"; 65°10'11".

61 $b=8{,}81224$; $B=9°54'52"$. **62**. $\triangle\ ABC$; $CK=k$. Продолживъ CK на $KD=CK$ и соединивъ D съ A и B, получимъ параллелограммъ $ABCD$; изъ $\triangle\ ACD$ по тремъ сторонамъ a, b и $2h$ опредѣлимъ углы ACD и ADC, сумма которыхъ $=\angle ACB$; $\operatorname{tg}{}^1/_2 ACB=$

$$=\sqrt{\frac{p}{p-2k}}\left(\sqrt{\frac{p-b}{p-a}}+\sqrt{\frac{p-a}{p-b}}\right),$$ гдѣ p—полупериметръ

64. 56,088; 618,316; $\partial a\sin(\alpha+y)$, гдѣ $\sin y=\frac{2u\sin\alpha}{\partial}$; $\partial\sin(\alpha+y):\sin\alpha$. **65**. 25°31"; 38,793.

66. Третья сторона $a=\frac{m}{h}\sin\alpha$; углы опред. такъ: $\frac{b}{h}=\operatorname{sn}\gamma, \frac{c}{h}=\operatorname{sn}\beta$.

слѣд., $\frac{bc}{h^2}=\operatorname{sn}\beta\sin\gamma$, но по рав. (4) § 37 $2\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma=$ $=\operatorname{cs}{}^1/_2(\gamma-\beta)-\operatorname{cs}{}^1/_2(\gamma+\beta)$, слѣд., $\frac{2m}{h^2}=\operatorname{cs}{}^1/_2(\gamma-\beta)-$ $-\operatorname{cs}{}^1/_2(\gamma+\beta)$, откуда $\operatorname{cs}{}^1/_2(\gamma-\beta)=\frac{2m}{h^2}-\operatorname{cs}{}^1/_2(\gamma+\beta)=$ $=\frac{2m}{h^2}-\operatorname{sn}{}^1/_2\alpha$, такимъ образ. опред. $\gamma-\beta$, а $\gamma+\beta=180-\alpha$.

67. Изъ рав. (10) § 67 найдемъ: $\operatorname{cs}{}^1/_2 A:\operatorname{sn}{}^1/_2 C=a\operatorname{sn}{}^1/_2 B:r$, но $\operatorname{cs}{}^1/_2 A=\operatorname{sn}{}^1/_2(B+C)$; изъ этихъ равенствъ найдемъ: $\operatorname{ctg}{}^1/_2 C=$ $=\frac{a}{r}-\operatorname{ctg}{}^1/_2 B$.

68. $x+y=s$; $xy=-2a\sqrt{1+t^2} : t$; $x=28$, $y=15$, $z=41$.
69. $\pi(a^2+b^2-2ab\cos a) : 4\sin^2 a$. **70.** $a : 2\sin(B+C)$.
71. § 67 (1); 323,99; 255,99; 366,25. **72.** Бокъ$=11,642$ (§ 65, 4-й).
73. $H : \mathrm{sn}(\alpha+\beta)$ и $h : \mathrm{sn}(\alpha+\beta)$ гдѣ $\mathrm{sn}\,\alpha=\frac{H}{a}$ и $\mathrm{sn}\,\beta=\frac{h}{a}$.
74. $\frac{a\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}=9,516$. **75.** 64,93 и 86,92. **76.** 100.
77. 37,393. **78.** 463,98. **80.** $\frac{a\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}{\mathrm{sn}(\beta-\alpha)}$.
81. $b\,\mathrm{sn}(45+A) : \mathrm{sn}\,A=54,779$; $b\,\mathrm{sn}(45+A) : \mathrm{cs}\,A=32,059$.
82. $x=b\,\mathrm{sn}\,\beta : \mathrm{sn}(\beta+{}^1/_2\,\alpha)$; $y=b\,\mathrm{sn}\,\beta : \mathrm{sn}(\beta-{}^1/_2\,\alpha)$.
83. 83°40'44"; 61°51'37". **84.** 94°52'50".
85. Такъ какъ $\triangle\triangle$ подобны, если ихъ соотвѣтств. стороны пропорціональны, то ищемъ углы $\triangle$-а со сторонами въ 15 м., 14 м. и 13 м; 59°29'23".
86. См. зад. 82; $a=120$, $b=104$, $A=112°37'11"$.
87. Такъ какъ у подобныхъ $\triangle$-овъ соотв. высоты пропорціональны, то ищемъ углы того $\triangle$-а (подобнаго данному), высоты котораго равны 3 м., 4 м. и 6 м; пусть его стороны x, y и z тогда $3x=4y=6z$, откуда $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$, слѣд. стороны его пропорціональны числамъ 4, 3 и 2 (см. зад. 85); 104°28'39".
88. Стороны $\triangle$-а пропорціональны числамъ 14, 15 и 21; $\mathrm{tg}\,{}^1/_2 x=\sqrt{1,1}$.
89. Изъ конца меньшаго основанія провести параллель боку.
91. $\pi(b+2a)(b-a)^2\mathrm{sn}^2 A\,\mathrm{sn}^2 D : 3\,\mathrm{sn}^2(A+D)=7569,03$.
92. Такъ какъ уголъ между высотою и биссекторомъ его есть полуразность двухъ другихъ угловъ $\triangle$-а β и γ, то $\mathrm{cs}\,{}^1/_2(\beta-\gamma)=\frac{h}{b}$. Иначе: острый уголъ биссектора съ осн.$=x$, отрѣзки основанія y и z; выразивши площадь всего $\triangle$-а чрезъ ${}^1/_2\,(y+z)\,h$ и чрезъ b, x и $\frac{\alpha}{2}$ по рав. (2) § 64, найдемъ, что $y+z=b^2h : (h^2-b^2\mathrm{sn}^2\,{}^1/_2\,\alpha)$.
93. Другіе углы x и y; $\mathrm{sn}\,x : \mathrm{sn}\,y=1{}^1/_2$, но $x=180-\alpha-y$, слѣд. $\mathrm{sn}\,x=\mathrm{sn}(\alpha+y)$, откуда $\mathrm{tg}\,y=\sin\alpha : (1,5-\mathrm{cs}\,\alpha)$.
94. Большая$=2R\sin{}^1/_2\alpha : \sqrt{1+k^2-2k\sin{}^1/_2\,\alpha}$.
95. $a^2\mathrm{tg}\,{}^1/_2(\alpha+\beta)\,\mathrm{cs}^2\,{}^1/_2(\alpha-\beta)$. **96.** $a\sin\alpha\sin\beta : \sin(\alpha+\beta)\,\mathrm{cs}\,{}^1/_2\,(\alpha-\beta)$.
97. $(R+a)\,\mathrm{cs}\,\alpha+\sqrt{R^2-(R+a)^2\mathrm{sn}^2\alpha}$. **98.** $\sin x={}^1/_6\,(\sqrt{22}-2)$.
100. $\frac{(a+b)^2\mathrm{sn}^2\,{}^1/_2\,\alpha+(a-b)^2\,\mathrm{cs}^2\,{}^1/_2\,\alpha}{2(a+b)-4b\,\mathrm{cs}^2\,{}^1/_2\,\alpha}$.
101. $\frac{(b-a)^2\mathrm{cs}^2\,{}^1/_2\,\alpha+(b+a)^2\,\mathrm{sc}^2\,{}^1/_2\,\alpha}{2(b-a)-4b\,\mathrm{sn}^2\,{}^1/_2\,\alpha}$.
102. Катеты $2a\,\mathrm{cs}^2\,{}^1/_2\,\alpha$ и $a\,\mathrm{cs}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,{}^1/_2\,\alpha$.
103. $\mathrm{ctg}\,C=2\pm\sqrt{3}$; $C=15°$.
104. Рад.$=abc : \sqrt{(a+b+{}^1/_2c)(a+b-{}^1/_2c)(a-b+{}^1/_2c)(b+{}^1/_2c-a)}$.
105. 76°16'4"; 8°1'55". **106.** 35°41'4"; 24,37.

107. Углы при большемъ осн. 109°49′30″ и 53°52′30″.

108. 68°54′; 63°56′53″. **109**. $r = a\sin{}^1/_2 B\sin{}^1/_2 C : \mathrm{sn}{}^1/_2 (B+C) = 12{,}923$.

110. $R = {}^1/_2 \partial \sin{}^1/_4 (\alpha+\beta)\ \mathrm{cs}\,{}^1/_4(\alpha+\beta)$. **111**. $\sqrt[3]{9\pi v^2 \mathrm{tg}\,{}^1/_2\,\alpha} : \sin\alpha$.

112. $AM = \sqrt{\dfrac{ab\sin C}{\sin 2A}}$.

113. x—уг. между C и B; $\mathrm{tg}\,{}^1/_2 x = \sqrt{\dfrac{(\partial+b-a-c)(\partial-b+a+c)}{(c+\partial+b-a)(c-\partial+b-a)}}$.

114. x—уголъ c съ биссекторомъ C; $\sin x = \dfrac{a+b}{c}\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}$.

115. Стороны, заключающія данный уголъ, $= {}^1/_2\left(m \pm \sqrt{m^2 - \dfrac{8S}{\sin A}}\right)$.

116. 207,62. **117**. 97,979; 206,234. **118**. Отъ A до B 6,34 в.

119. Иск. раст $= a\,\mathrm{ctg}\,x$ гдѣ x опред. изъ ур. $a = -b\ \mathrm{cs}\,(\alpha+2x)$ или $a = -b\cos(\alpha-2x)$. **120**. См. зад. 119.

121. $r = (p-a)\ \mathrm{tg}\,{}^1/_2 A$, отсюда найдемъ a, слѣд., найдемъ $b+c$, а bc изъ ур. $pr = {}^1/_2\, bc \sin A$.

122. На осн. рав. (10) § 67 найдемъ, что $s = {}^1/_2 r\ (\mathrm{sn}B + \mathrm{sn}C) : : \mathrm{sn}\,{}^1/_2 A\,\mathrm{sn}\,{}^1/_2 B\,\mathrm{sn}\,{}^1/_2 C$, а на осн. задачи 9 § 64 получимъ : $\mathrm{cs}\,{}^1/_2(B+C) = s\sin{}^1/_2 A : (s-2r\ \mathrm{ctg}\,{}^1/_2 A)$; отсюда опредѣлимъ $B-C$, а $B+C = 180-\alpha$.

123. α—уголъ при вершинѣ; $\sin{}^1/_2\alpha = {}^1/_2 m$; y—осн.; $y = 2r\sin\alpha$.

124. ${}^1/_2(4m^2 - a^2)\ \mathrm{tg}\,{}^1/_2 A$.

125. 7,155; получается параллелограммъ съ угломъ въ 45° и діагональю равною высотѣ. **126**. $A = 62°58′$.

127. $AB = 1{,}414$; $x = 45°$. **128**. 1084; 36°52′12″.

129. Свести на 48 зад.; $a = 30{,}541$; $B = 78°27′13″$.

130. $BH = 32{,}384$, $HE = 183{,}66$. **131**. $A = 101°32′12″$, $B = 49°58′38″$.

133. $a\,\mathrm{cs}\,{}^1/_2\alpha : \sin(45 + {}^3/_4\alpha)$. **134**. $R^2 \sin 72°\ (1+2\sin 18°)$.

ГЛАВА VII.

2. Выраженія высоты чрезъ отрѣзки раздѣлить одно на другое.

3. См. зад. 2. **4** См. зад. 3.

5. 53°8′22 и 26°51′48″ или 36°52′11″ и 43°7′47″.

6. 36°52′12. **9**. $\sin x = {}^{33}/_{65}$. **13**. 83°38′30″.

14. 70°32′34″. **15**. М. к. = 16,43. **16**. 71,13.

17. Подставить $\sin a$ и $\cos a$ въ рав. 1 § 8.

19. Перемноживъ уравненія, найти $\cos x$; см. зад. 17.

20. 28°4′21″ **21**. 1320.

22. 64°56′33″ и 50°6″54. **23**. 9 см.

24. O—ц. кр. впис. въ тр. ABC; $OM = x$, $ON = y$, $OK = z$ перпендик. на BC, AC, CB. Треуг. BOM, NOC, KOB даютъ $x = R\ \mathrm{cs}\,A$, $y = R\ \mathrm{cs}\,B$, $z = R\ \mathrm{cs}\,C$, сложить и принять во вниманіе зад. 9 § 61 и рав. 5 § 67.

26. $x = 1{,}5$.

27. Представ. въ видѣ arc tg $(x+1)$ = arc tg $(x-1)$ + 2 arc tg $(x-1)$, примѣнить рав. 6 § 33; $x - \sqrt{2}$.

29. 105,71. **30.** $x=90$. **31.** -1.
32. 134°45′37″ и 106°15′37″. **33.** 123°51′18″ и 56°8′42″.
34. 40°, 60°, 80° и 23, 63. **37.** 364.
38. 1,0016. **39.** 17°45′.
40. $a=h\sin B$, $a=2R\sin A$; $R=56^1/_6$.
42. 23°51′55″=полуразность высотъ солнца.
43. $na^2\sin\left(\frac{m}{2}+\frac{\pi}{n}\right):4\sin\frac{m}{2}\sin\frac{\pi}{n}$. **45.** $n\partial^3\sin a\sin b\ :\ 12\sin(a+b)$.
46. $^4/_3\pi R^3\sin^2{}^1/_4 a$. **47.** $2\sqrt{\frac{V}{nH}\operatorname{ctg}\frac{180}{n}}$.
48. $^1/_3\pi(R^3-r^3)\operatorname{tg}\alpha$. **49.** $^1/_2$.
50. $\sqrt{2T^2+2Tt+t^2-2T(T+t)\cos a}=4550,9$.
51. 9380,2.
53. Уголъ между высотою и биссекторомъ равенъ полуразности; отыскать биссекторъ.
54. Изъ $\sin A-\sin B=\sin B-\sin C$ им. $2\sin B=\sin A+\sin C$ или $4\sin{}^1/_2B=\cos{}^1/_2B\sin{}^1/_2(A+C)\cos{}^1/_2(A-C)$ или $2\sin{}^1/_2B=\cos{}^1/_2(A-C)$ или $2\cos{}^1/_2(A+C)=\cos{}^1/_2(A-C)$; по рав. 3 и 4 § 29 им. $\operatorname{ctg}{}^1/_2A\operatorname{ctg}{}^1/_2C=3$; примѣнить зад. 16 § 64.
55. $\frac{a}{h}=\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{2\sin A}{\cos(B-C)-\cos(B+C)}=$ $=\frac{2\sin A}{\cos(B-C)+\cos A}$, но $(b+c):a=\cos{}^1/_2(B-C):\sin{}^1/_2A$; изъ этихъ уравненій $B-C$. **56.** См. зад. 55; 42°30′44″; 88°3′27″.
57. 38,38. **58.** $ah_1=bh_2=ch_3=2S$.
61. 90°. **63.** $\sin x=0$; $\cos x={}^1/_4(\sqrt{17}-1)$.
63a. Невозможно. **64.** $\cos x=0$. $\sin 2x=1$.
65. $\sin x=0$, $\cos x=0{,}5$. **66.** $\cos x=0$, $\cos 3x={}^1/_2\,ab$.
67. $\sin x=0$, $\sin 3x=-{}^1/_2\,ab$. **68.** $\operatorname{tg}x={}^1/_2(a\pm\sqrt{a^2+4})$.
71. $\sin x=0$ или $\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2-1}}$. **72.** $\operatorname{tg}x=1$ или $\frac{a-b}{a+b}$.
73. $\operatorname{tg}x=-1$ или $\sin(45-x)=\frac{a\sqrt{2}}{2b}$.
74. $\cos x=0$; $\cos(n-1)x=0{,}5$. **75.** $\cos x=-1$ и 0,25.
76. 23°34′5″. **77.** Найти $\sin(x+y)$ и $\sin(x-y)$.
85. $\cos x=0$, $-{}^1/_2\sin x={}^1/_2$, а $x={}^1/_2n\pi$, $2n\pi\pm{}^2/_3\pi$, $2n\pi+{}^1/_6\pi$, $(2n+1)\pi-{}^1/_6\pi$. **88.** $\sin x=0{,}6$ и ${}^1/_2\sqrt{2}$. **95.** $\sin x=1$ и 0.
96. $\cos x=1$ или $\sqrt{0{,}5}$.
111. x, $x+1$, $x+2$; $\operatorname{ctg}{}^1/_2A=\operatorname{tg}{}^1/_2(B+C)$; $x=1$.
112. Высота BD, медіана DM, $\angle DBC=p$; $2MD=BD[\operatorname{tg}p-\operatorname{tg}(B-p)]$.
113. См. зад. 55. **115.** 70°31′46″. **122.** 36°52′12″.
124. Найдя тангенсы угловъ, найти тангенсъ ихъ суммы.
125. 138,57; 299,3; 41°37′11″. **127.** 16,315 и 26,104.

129. Изъ $ab=2Rh$ найдемъ h; выразивъ a и b чрезъ h, A и B, найдемъ A и B.

130. Гип. $= p - \frac{s}{p} = 18{,}1$; $B=83^\circ 58' 28''$.

131. $2R^2 \sin^2 {}^1/_4\,(a-b) : \cos {}^1/_2\,(a-b)$.

132. $9 \cos 45^\circ \operatorname{ctg} 22^\circ 5$. **133.** $a=2\sin A$; $a=2R\sin B$.

134. Отношеніе площ. $\triangle$-овъ равно отношенію основаній; пусть одно $4a$, другое $5a$; высота большаго дѣлитъ основаніе на части ${}^1/_2\,a$ и $4\,{}^1/_2\,a$; им. $h={}^1/_2 a \operatorname{tg} 46^\circ = 4{}^1/_2 a \operatorname{tg} x$.

135. $a=11{,}79$, $b=22{,}776$. **136.** 10,036 и 3,18.

137. $A=43^\circ 42' 52''$, отыскать высоту.

138. Пусть x—уголъ между діаг. и больш. основ.; $\operatorname{tg} x={}^{42}/_{56}$.

139. x и y—углы діагоналей съ больш. основ.; $100 \sin y = 80 \sin x$; $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} 80^\circ - \operatorname{ctg} 47^\circ 11' 25''$; 38,288; 93,905.

140. 87,57; 68,954. **141.** $AO=116{,}238$.

142. $OA=5{,}6879$, $\angle\, OCA=30^\circ 38' 20''$.

143. 81,9 и 49,1. **144.** 210,91 и 522,025

146. Найти AC; примѣнить свойство отрѣзковъ пересѣкающихся хордъ, $\frac{2R\cos a}{3\sin^2 a + 1}$.

149. $23^\circ 34' 5''$. **154.** $\frac{a}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ **164.** $x=0,\ {}^1/_2\sqrt{3},\ -{}^1/_2\sqrt{3}$.

165. $\operatorname{tg} x = {}^1/_4 - n$. **166.** $x=n\pi + {}^1/_6\,\pi\,(-1)^n$

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Книга отпечатана на бумагѣ съ водяными знаками „А. Д. Воиновъ.“